Olimpiada Naţională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Deva, 25 aprilie 2019

Problema 1. Fie n un număr natural nenul dat. Determinaţi toţi divizorii (pozitivi) d ai lui $3n^2$ pentru care n^2+d este pătrat perfect.

Cristinel Mortici

Soluţia 1:
Dacă d divide $3n^2$, atunci există $k,m \in \mathbb{N}$ astfel încât $3n^2 = d \cdot k$ şi $n^2+d=m^2$. Atunci $n^2 = \dfrac{3n^2}{k} = m^2$, deci $(mk)^2 = n^2(k^2+3k)$. De aici deducem că k^2+3k este pătrat perfect. Dar $k^2 < k^2+3k < (k+2)^2$, deci $k^2+3k=(k+1)^2$, de unde $k=1$ şi $d=3n^2$.
Reciproc, pentru $d=3n^2$ avem că $n^2+d=(2n)^2$ este într-adevăr pătrat perfect.

Soluţia 2:
Fie d un divizor al lui $3n^2$ pentru care $n^2+d=m^2$. Atunci $m>n$ şi $d=(m-n)(m+n)$. Dacă notăm cu $D=(m,n)$ atunci există $a,b \in \mathbb{N}$ astfel ca $m=Da$, $n=Db$, cu $a>b$, $(a,b)=1$. Atunci condiţia $(m-n)(m+n) \mid 3n^2$ devine $(a-b)(a+b) \mid 3b^2$. Dar $(a,b)=1$ implică $(a+b,b)=1$ şi $(a-b,b)=1$, deci $(a-b)(a+b) \mid 3$. Cazul $(a-b)(a+b)=1$ conduce la $a-b=a+b=1$, deci la $b=0$, ceea ce nu convine. Rămâne că $a-b=1$, $a+b=3$, deci $a=2$, $b=1$, adică $m=2n$. De aici rezultă $d=(2n)^2-n^2=3n^2$.

Problema 2. Aflaţi valoarea maximă pe care o ia expresia

$$E(a,b) = \frac{a+b}{(4a^2+3)(4b^2+3)}$$

atunci când $a,b \in \mathbb{R}$.

Marius Stănean

Soluţia 1:
Vom arăta că valoarea maximă este $\dfrac{1}{16}$, valoare care se atinge pentru $a=b=\dfrac{1}{2}$.
Inegalitatea $E(a,b) \leq \dfrac{1}{16}$ este echivalentă cu $16(a+b) \leq (4a^2+3)(4b^2+3)$, inegalitate care se poate scrie $(4ab-1)^2+4(a+b-1)^2+2(2a-1)^2+2(2b-1)^2 \geq 0$ şi este, ca atare, evidentă.
Remarcă: Inegalitatea $16(a+b) \leq (4a^2+3)(4b^2+3)$ se poate rescrie $a^2(16b^2+12) - 16a + (12b^2-16b+9) \geq 0$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ şi se poate demonstra privind expresia de mai sus ca pe o funcţie de gradul al doilea în a.

Soluţia 2:

Vom arăta că valoarea maximă este $\dfrac{1}{16}$, valoare care se atinge pentru $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Avem $a + b \leq \dfrac{(1 + a + b)^2}{4}$ (echivalentă cu $(a + b - 1)^2 \geq 0$).

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem $(4a^2+3)(4b^2+3) = (4a^2+1+2)(1+4b^2+2) \geq (2a + 2b + 2)^2$.

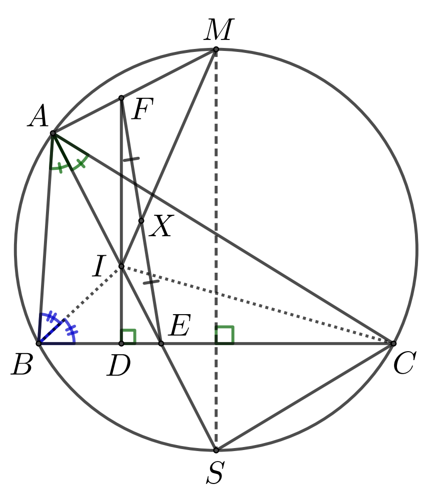
Combinând cele două inegalităţi de mai sus şi folosind că $(4a^2 + 3)(4b^2 + 3) > 0$, obţinem

$$\frac{a+b}{(4a^2+3)(4b^2+3)} \leq \frac{(a+b+1)^2}{4(4a^2+3)(4b^2+3)} \leq \frac{(a+b+1)^2}{4(2a+2b+2)^2} = \frac{1}{16}.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului său înscris, D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC, iar E piciorul bisectoarei din A. Dacă M este mijlocul arcului BC care îl conţine pe A al cercului circumscris triunghiului ABC şi $\{F\} = DI \cap AM$, demonstraţi că dreapta MI trece prin mijlocul segmentului $[EF]$.

Alexandru Gîrban

Soluţie:



Se ştie că bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ intersectează cercul circumscris în mijlocul arcului BC care nu conţine punctul A. Notăm acest punct cu S. Atunci MS este mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $MS \parallel ID$ (ambele sunt perpendiculare pe BC). De asemenea, $\angle ASC \equiv \angle ABC$ şi $\angle SAC \equiv \angle BAE$ arată că triunghiurile SAC şi BAE sunt asemenea. Deducem că $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AS}{SC}$. Din teorema bisectoarei, $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AI}{IE}$. Se ştie că $SI = SC$ (rezultă dintr-un calcul de unghiuri în triunghiul SCI). Atunci $\dfrac{AS}{SC} = \dfrac{AS}{SI} = \dfrac{AM}{MF}$. Combinând egalităţile de mai sus rezultă că $\dfrac{AI}{IE} = \dfrac{AM}{MF}$. În fine, din teorema lui Menelaus aplicată pentru triunghiul AEF tăiat de transversala $I - X - M$ (unde $\{X\} = IM \cap EF$) rezultă $\frac{AI}{IE} \cdot \frac{EX}{XF} \cdot \frac{MF}{MA} = 1$ şi, folosind egalitatea precedentă, obţinem că $\frac{EX}{XF} = 1$, de unde concluzia.

Problema 4. Ana şi Bogdan joacă următorul joc: la început, pe masă se află o grămadă formată din n ($n \geq 3$) pietricele. Cei doi jucători mută alternativ, prima mutând Ana. La o mutare, jucătorul aflat la mutare împarte una din grămezile de pietricele aflate pe masă în două grămezi mai mici, nu neapărat egale. Câştigă jucătorul care, prin mutarea sa, face ca toate grămezile aflate pe masă să conţină cel mult două pietricele.
În funcţie de valorile lui n, stabiliţi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare.

Soluţia 1:
Ana câştigă dacă $n = 3$ sau dacă n este par; Bogdan câştigă dacă $n > 3$ este impar.
Dacă n este impar, $n > 3$, strategia lui Bogdan este următoarea: el lasă mereu pe masă numai grămezi cu un număr impar de pietricele. Atunci, inclusiv la prima ei mutare, Ana va împărţi o asemenea grămadă în două, una având un număr par de pietricele, cealaltă un număr impar. Bogdan va împărţi grămada cu un număr par în două grămezi cu un număr impar de pietricele.
Bogdan va proceda conform acestei strategii până când ajunge la mutare într-una din situaţiile:
A: pe masă se află o grămadă cu 4 pietricele şi restul cu una, caz în care Bogdan câştigă împărţind grămada de 4 în două de 2,
B: pe masă se află o grămadă de 3, una de 2, restul de 1, caz în care Bogdan câştigă împărţind grămada de 3 într-una de 2 şi una de 1.
Dacă $n = 3$ sau $n = 4$ este evident că Ana câştigă.
Dacă $n \geq 6$ este par, Ana împarte grămada de pe masă într-una de 1 şi una de $n - 1$. Cum $n - 1 \geq 5$ este impar, primul jucător (care este de-acum Bogdan), va pierde.

Soluţia 2:
Ana câştigă dacă $n = 3$ sau dacă n este par; Bogdan câştigă dacă $n > 3$ este impar.
Este evident că pentru $n = 3$ câştigă Ana.
Dacă $n > 3$ este par, Ana împarte grămada în două grămezi egale, apoi copiază mutările făcute de Bogdan asupra uneia din grămezi (sau pe grămăjoarele provenite din aceasta) pe cealaltă grămadă. Dacă Bogdan mai are de transformat grămezi mai mari în unele de mărime 1 sau 2, atunci şi Ana are de făcut acelaşi lucru în jumătatea cealaltă, deci Bogdan nu a câştigat cu niciuna din mutările sale.
Pentru $n > 3$ impar câştigă Bogdan. Iată cum:
Demonstrăm afirmaţia prin inducţie. Pentru $n = 5$ este uşor de văzut că Bogdan câştigă. Fie acum $n > 5$ impar. Presupunem că pentru orice m impar, $5 \leq m < n$, câştigă Bogdan. Demonstrăm că Bogdan câştigă şi dacă se pleacă de la n pietricele.
Ana va lăsa la prima ei mutare două grămezi, de mărimi a şi b, cu $a < b$ ($a + b = n$ este

impar).
Dacă $b - a \neq 3$, Bogdan va lăsa 3 grămezi, de mărimi a, a şi $b - a$. De aici înainte, dacă Ana mută ceva într-una din grămezile de mărime a, Bogdan face aceeaşi mutare în cealaltă grămadă de mărime a. Dacă Ana mută în grămada de mărime $b - a$, la fel face Bogdan. Vom demonstra că dacă Ana a avut mutare, atunci şi Bogdan are mutare. Dacă ultima mutare se face în zona de pietricele provenind din grămada de mărime $b-a$, atunci înseamnă că în zona pietricelelor provenind din cele două grămezi egale s-a mutat numai în oglindă. Ignorând mutările făcute în această zonă, jocul revine la un joc pe grămada de mărime $m = b - a$, joc pe care, conform ipotezei de inducţie, îl câştigă Bogdan. Dacă ultima mutare s-a făcut în zona provenind din cele două grămezi egale, înseamnă că ea a fost făcută de Bogdan.
Câtă vreme jocul nu s-a încheiat în zona grămezilor egale, se mai pot face mutări în grămada de mărime $b - a$ şi după ce toate grămezile de aici au cel mult două pietricele. În grămada de mărime $b - a$ se pot face în total $b - a - 1$ mutări (fiecare mutare creşte cu 1 numărul grămezilor). Dar $b - a - 1$ este par, deci ultima mutare din această zonă va fi făcută de Bogdan, iar de aici el poate imita mutările Anei în zona grămezilor egale.
Dacă $b - a = 3$, Bogdan împarte grămada pară în două jumătăţi egale şi procedează ca mai sus (se obţin două grămezi egale şi o a treia de mărime impară, diferită de 3). Sigura excepţie este $n = 9$, $a = 3$, $b = 6$. În acest caz, Bogdan lasă 3 grămezi de 3, dar în continuare nu va mai adopta strategia de a copia mutările Anei într-o altă grămadă, ci va muta în aceeaşi grămadă în care a mutat şi Ana (împărţind o grămadă de 2 în două de 1). El va lăsa $1, 1, 1, 3, 3$ şi orice ar muta Ana, Bogdan va câştiga la următoarea mutare.