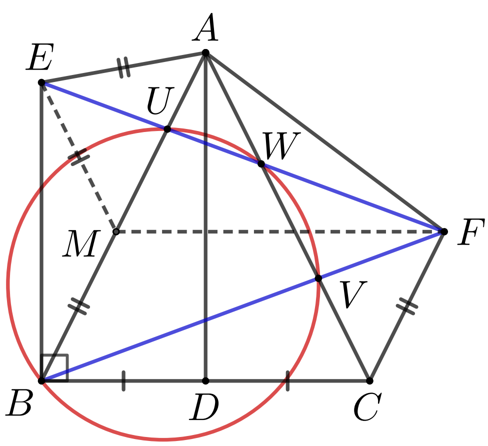
Problema săptămânii 137
Se consideră D mijlocul bazei $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC în care $m(\angle BAC) < 90°$. Pe perpendiculara în B pe dreapta BC se consideră punctul E astfel încât $\angle EAB \equiv \angle BAC$, iar pe paralela prin C la dreapta AB se consideră punctul F astfel încât $\angle FAC \equiv \angle CAD$. Dacă $\{U\} = AB \cap EF$, iar $\{V\} = AC \cap BF$, demonstraţi că $EU = VF$ şi $FU = VB$.

(în legătură cu problema 2 de la Olimpiada judeţeană 2019, clasa a VII-a)

Soluţia 1: (bazată pe soluţia oficială a problemei de la judeţeană)
Problema de la olimpiada judeţeană cerea, în aceleaşi ipoteze ca problema noastră, demonstrarea egalităţilor: $AE = CF$ şi $EF = BF$.
Iată cum se demonstra în soluţia oficială acest lucru:
Notând $m(\angle BAD) = m(\angle CAD) = \alpha$, avem $m(\angle EAB) = 2\alpha$, $m(\angle EBA) = \alpha$, $m(\angle ACF) = 2\alpha$ şi $m(\angle CAF) = \alpha$, deci triunghiurile EBA şi FAC sunt congruente (ULU). Deducem că $AE = CF$.
Fie M punctul în care mediatoarea segmentului $[BE]$ intersectează dreapta AB. Atunci $MB = ME$, deci $m(\angle MBE) = m(\angle MEB) = \alpha$, $m(\angle EMA) = 2\alpha = m(\angle EAM)$. Rezultă că $BM = EM = AE = CF$, deci $MBCF$ este paralelogram. Cum $BE \perp BC$, deducem că $MF \perp BE$, deci MF este mediatoarea segmentului $[BE]$, de unde concluzia.

Din cele de mai sus rezultă congruenţa unghiurilor $\angle MEF$, $\angle MBF$ şi $\angle CFB$, apoi congruenţa (ULU) a triunghiurilor MEU şi CFV. Într-adevăr, $\angle MEU \equiv \angle CFV$, $ME = AE = CF$ şi $m(\angle EMU) = 2\alpha = m(\angle VCF)$. De aici rezultă $EU = VF$, apoi din $EF = BF$, prin scădere, rezultă $FU = VB$.



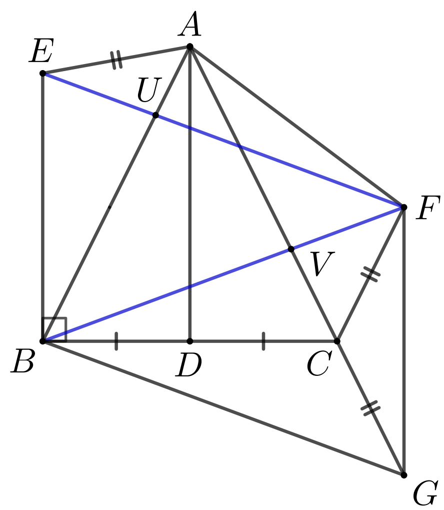
Remarcă: Congruenţa de triunghiuri demonstrată mai sus arată că patrulaterul $BVWU$ este inscriptibil. (Am notat cu $\{W\} = EF \cap AC$.)

Soluţia 2: (bazată pe soluţia lui *David-Andrei Anghel*)
Ca mai sus se arată că $AE = CF$ şi $EF = BF$. Dacă $\{W\} = EF \cap AC$, atunci putem folosi următoarea proprietate cunoscută:

Fie $ABCD$ un patrulater în care $AB \cap CD = \{E\}$ şi $BC \cap AD = \{F\}$. Atunci bisectoarele unghiurilor $\angle BEC$ şi $\angle AFB$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă patrulaterul este inscriptibil. (Demonstraţia este imediată: un calcul de unghiuri într-un patrulater format de cele două bisectoare şi două dintre laturile patrulaterului.)

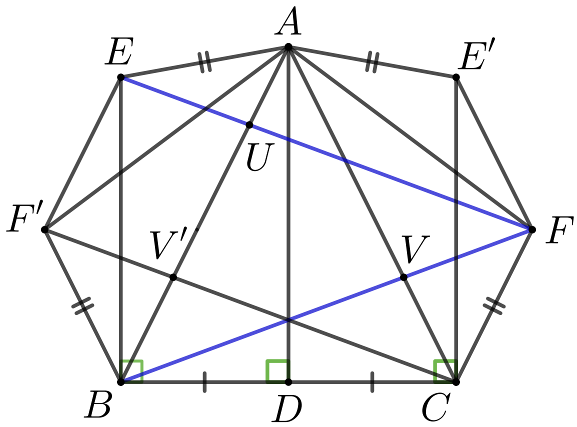
În cazul nostru, bisectoarele AD şi FM ale unghiurilor $\angle UAW$ şi $\angle WFV$ sunt perpendiculare, deci patrulaterul $BVWU$ este inscriptibil.
Atunci $\angle EUM \equiv \angle FVC$ şi, cum $m(\angle EMU) = m(\angle FCV) = 2\alpha$ şi $ME = EA = CF$, triunghiurile EMU şi FCV sunt congruente (ULU). Rezultă de aici că $EU = FV$ şi apoi că $FU = VB$.

Soluţia 3: (*Radu Lecoiu*)
Fie $G \in AC$ astfel încât $m(\angle AGF) = m(\angle CAF) = m(\angle DAC)$. Atunci $FG \parallel AD$, deci $FG \parallel BE$. În plus, $FG = FA = BE$, deci $EBGF$ este paralelogram. Rezultă că $EF = BG$. Cum $CF = CG$ şi $BC \perp FG$, rezultă că BC este mediatoarea lui $[FG]$, deci $BF = BG = EF$. Deducem că $\angle BFG \equiv \angle FBE \equiv \angle BEF$.
În fine, triunghiurile EUB şi FVG sunt congruente (ULU):
$EB = FG$, $m(\angle UBE) = m(\angle VGF) = m(\angle DAC)$ şi $\angle UEB \equiv \angle VFG$.
Deducem că $EU = VF$ şi, cum $EF = BF$, obţinem şi că $UF = VB$.



Soluţia 4: (*Lucia Rîşnoveanu*)
Fie E' astfel încât $E'C \perp BC$ şi $\angle E'AC \equiv \angle BAC$.
Fie F' astfel încât $F'B \parallel AC$ şi $\angle F'AB \equiv \angle BAD$.
Notăm cu $\{V'\} = CF' \cap AB$ şi cu $x = m(\angle DAC)$.

Avem: $m(\angle F'BA) = m(\angle EAB) = 2x$, $m(\angle F'AB) = m(\angle EBA) = x$ şi $AB = BA$, deci triunghiurile $F'AB$ şi EBA sunt congruente (ULU). Deducem că $m(\angle BF'A) = m(\angle BEA)$, ceea ce arată că patrulaterul $EF'BA$ este inscriptibil.
Atunci $m(\angle EBA) = m(\angle EF'A) = x = m(\angle F'AB)$, deci $EF' \parallel AB$.
În triunghiul $EF'A$ avem $m(\angle EF'A) = m(\angle EAF') = x$, deci $EF' = EA$ (1).
Analog, $E'F \parallel AC$, $E'F = FC = E'A$ (2).
Datorită simetriei, $AE = AE'$ (3).
Din (1), (2) şi (3) rezultă că $EF' = FC$ şi, cum dreptele EF', AB şi FC sunt paralele, rezultă că $EF'CF$ este paralelogram.
Deducem că $EF \parallel F'C$ şi $EF = F'C$.
Dar $UV' \parallel EF'$ şi $EU \parallel F'V'$ implică $EF'V'U$ paralelogram. Rezultă că $EU = F'V'$ şi $EF = F'C$, de unde $UF = V'C$.
Din cauza simetriei, $F'V' = FV$ şi, cum $EU = F'V'$, avem $EU = FV$.
Din cauza simetriei, $CV' = BV$ şi, cum $FU = CV'$, avem $FU = BV$.



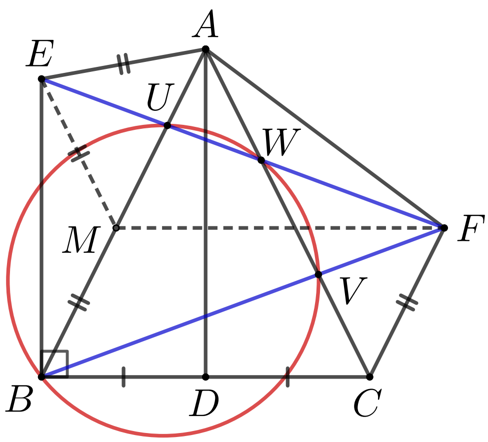
Problem of the week no. 137
Let D be the midpoint of the base BC of an acute isosceles triangle ABC. On the line perpendicular at B to BC, consider the point E such that $\angle EAB = \angle BAC$, while on the line parallel to AB passing through C consider the point F such that $\angle FAC = \angle CAD$. If $\{U\} = AB \cap EF$, and $\{V\} = AC \cap BF$, prove that $EU = VF$ and $FU = VB$.

based on a problem from the district round of the *Romanian Olympiad*, 2019

Solution 1: (based on the official solution of the Olympiad problem)
The problem given at the district round of this year's Olympiad asked, under the same hypothesis as in our problem, to prove that $AE = CF$ and $EF = BF$.
The official solution went as follows:
Denoting $m(\angle BAD) = m(\angle CAD) = \alpha$, we have $\angle EAB = 2\alpha$, $\angle EBA = \alpha$,

$\angle ACF = 2\alpha$ and $\angle CAF = \alpha$, hence triangles EBA and FAC are congruent (ASA). We deduce that $AE = CF$.
Let M the point in which the perpendicular bisector of the line segment $[BE]$ intersects the line AB. Then $MB = ME$, hence $\angle MBE = \angle MEB = \alpha$, and $\angle EMA = 2\alpha = \angle EAM$. It follows that $BM = EM = AE = CF$, which shows that $MBCF$ is a parallelogram. From $BE \perp BC$ it follows that $MF \perp BE$, which means that MF is the perpendicular bisector of theline segment $[BE]$, and the conclusion.

From the above follows the equality of the angles $\angle MEF$, $\angle MBF$ and $\angle CFB$, then the equality (ASA) of triangles MEU and CFV. Indeed, $\angle MEU = \angle CFV$, $ME = AE = CF$ and $\angle EMU = 2\alpha = \angle VCF$. From here we obtain that $EU = VF$, then, from $EF = BF$, by subtraction, follows $FU = VB$.



Remark: The equality of the two triangles proven above shows that the quadrilateral $BVWU$ is cyclic. (We put $\{W\} = EF \cap AC$.)

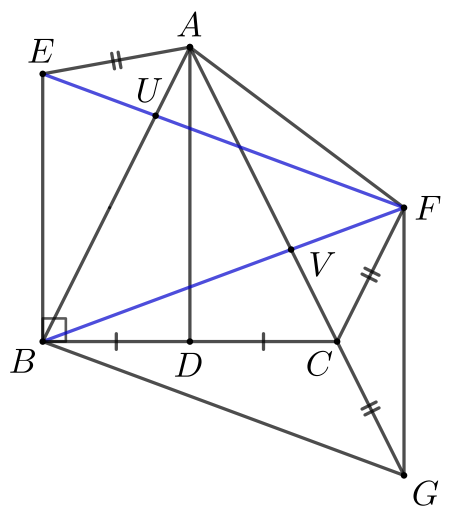
Solution 2: (based on *David-Andrei Anghel*'s solution)
As abobe, one proves that $AE = CF$ and $EF = BF$. If $\{W\} = EF \cap AC$, we can use the following well-known property:

Let $ABCD$ be a quadrilateral in which $AB \cap CD = \{E\}$ and $BC \cap AD = \{F\}$. Then the angle bisectors of $\angle BEC$ and $\angle AFB$ are perpendicular if and only if the quadrilateral is cyclic. (The proof is easy: angle-chasing in a quadrilateral determined by the bisectors and two of the sides of the quadrilateral.)

In our case, the angle bisectors AD and FM of $\angle UAW$ and $\angle WFV$ are perpendicular, hence $BVWU$ is cyclic.
Then $\angle EUM = \angle FVC$ and, as $\angle EMU = \angle FCV = 2\alpha$ and $ME = EA = CF$,

triangles EMU and FCV are congruent (ASA). It follows that $EU = FV$ and then $FU = VB$.

Solution 3: (*Radu Lecoiu*)
Let $G \in AC$ such that $\angle AGF = \angle CAF = \angle DAC$. Then $FG \parallel AD$, so $FG \parallel BE$. Moreover, $FG = FA = BE$, which shows that $EBGF$ is a parallelogram. It follows that $EF = BG$. As $CF = CG$ and $BC \perp FG$, it follows that BC is the perpendicular bisector of the line segment $[FG]$, hence $BF = BG = EF$. We deduce that $\angle BFG \equiv \angle FBE \equiv \angle BEF$.
Triangles EUB and FVG are congruent (ASA): $EB = FG$, $\angle UBE = \angle VGF = \angle DAC$ and $\angle UEB = \angle VFG$. It follows that $EU = VF$ and, from $EF = BF$, we also get $UF = VB$.



Solution 4: (*Lucia Rîşnoveanu*)
Let E' be such that $E'C \perp BC$ and $\angle E'AC \equiv \angle BAC$.
Let F' be such that $F'B \parallel AC$ and $\angle F'AB \equiv \angle BAD$.
We denote by $\{V'\} = CF' \cap AB$ and $x = \angle DAC$.
Then: $\angle F'BA = \angle EAB = 2x$, $\angle F'AB = \angle EBA = x$ and $AB = BA$, which means that triangles $F'AB$ and EBA are congruent (ASA). It follows that $\angle BF'A = \angle BEA$, which shows that the quadrilateral $EF'BA$ is cyclic.
Then $\angle EBA = \angle EF'A = x = F'AB$, hence $EF' \parallel AB$.
In triangle $EF'A$ we have $\angle EF'A = \angle EAF' = x$, hence $EF' = EA$ (1).
Similarly, $E'F \parallel AC$, $E'F = FC = E'A$ (2).
Because of the symmetry, $AE = AE'$ (3).
From (1), (2) and (3) it follows that $EF' = FC$ and, as lines EF', AB and FC are parallel, it follows that $EF'CF$ is a parallelogram. This means that $EF \parallel F'C$ and $EF = F'C$.
But $UV' \parallel EF'$ and $EU \parallel F'V'$ lead to $EF'V'U$ being a parallelogram. It follows that $EU = F'V'$ and $EF = F'C$, hence $UF = V'C$.

Because of the symmetry, $F'V' = FV$ and, as $EU = F'V'$, we obtain $EU = FV$.
Because of the symmetry, $CV' = BV$ and, from $FU = CV'$, we get $FU = BV$.