Problema săptămânii 136
Fie n un număr natural nenul. Spunem că grupul de numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este *bun* dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n$ şi, pentru niciun k, k număr natural mai mic ca n, să nu existe k dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ care să aibă suma n. Determinaţi grupurile bune.

Olimpiadă Iran, 1999

Soluţie:
Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un grup bun. Ne uităm la sumele: a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Toate aceste sume sunt cuprinse între 0 şi $2n$ exclusiv. Asta înseamnă că dacă vreuna din sume este $\equiv 0 \pmod n$, atunci ea este egală cu n, ceea ce contrazice faptul că grupul este bun. Mai mult, dacă două dintre aceste sume sunt congruente modulo n, să zicem că $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_j \pmod n$ cu $i < j$, atunci $a_{i+1} + \ldots + a_j \equiv 0 \pmod n$, ceea ce contrazice din nou faptul că grupul $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este bun. Conchidem că aceste $n-1$ sume trebuie să fie toate nenule şi distincte modulo n.
De asemenea, a_2 trebuie să fie nenul modulo n, deci trebuie să fie congruent modulo n cu una dintre sumele noastre. Dacă $a_2 \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_m \pmod n$ cu un $m > 1$, atunci $a_1 + a_3 + \ldots + a_m \equiv 0 \pmod 0$, contradicţie. Rezultă că $m = 1$, adică $a_1 \equiv a_2 \pmod n$. Cum a_1 şi a_2 sunt două numere arbitrare din grup, rezultă că toate numerele dintr-un grup bun trebuie să fie congruente modulo n. Media aritmetică a numerelor din grup fiind 2, cel puţin unul din numere trebuie să fie 1 sau 2, deci congruent cu 1 sau 2 modulo n.
Dacă toate numerele sunt congruente cu 1 modulo n, atunci grupul trebuie să fie format din numerele $1, 1, \ldots, 1, n+1$. Pentru orice k de la 1 la $n-1$, nicicare k dintre numere nu dau prin însumare n, deci acest grup este într-adevăr bun.
Dacă toate numerele sunt congruente cu 2 modulo n, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2$. Dacă n este impar, atunci grupul $2, 2, \ldots, 2$ este într-adevăr bun, în vreme ce, dacă n este par, atunci oricare $\frac{n}{2}$ dintre numere au suma n, deci în acest caz grupul $2, 2, \ldots, 2$ nu este bun.

Problem of the week no. 136
Let n be a positive integer. An n-tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ of positive integers is said to be *good* if $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n$ and if for every k between 1 and n, no k of the n integers add up to n. Find all n-tuples that are good.

Iranian Olympiad, 1999

Solution:
Consider a good n-tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and the sums a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_n$. All these sums are between 0 and $2n$ exclusive. This means that if any of these sums is $\equiv 0 \pmod n$, it equals n, which contradicts the fact that the n-tuple is good. Moreover, if two of these sums are congruent modulo n, say $a_1+a_2+\ldots+a_i \equiv$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_j \pmod{n}$ with $i < j$, then $a_{i+1} + \ldots + a_j \equiv 0 \pmod{n}$, again in contradiction with the n-tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ being good. We conclude that these $n - 1$ sums must all be nonzero and distinct modulo n.

Also, a_2 must be nonzero modulo n, so it must be congruent modulo n to one of the sums. If $a_2 \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_m \pmod{n}$ with $m > 1$, then $a_1 + a_3 + \ldots + a_m \equiv 0 \pmod{0}$, a contradiction. So, necessarily, $m = 1$, i.e. $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$. Since a_1 and a_2 are in fact two arbitrary numbers chosen from the n-tuple, it follows that all the numbers must be congruent modulo n. Because the average of the numbers is 2, one of the numbers a_k must be either 1 or 2.

If all the numbers are congruent to 1 modulo n, then $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ must be a permutation of $1, 1, \ldots, 1, n + 1$. For every k between 1 and $n - 1$, no k of the numbers add up to n, so these n-tuples are indeed good.

If all the numbers are congruent to 2 modulo n, then $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2$. If n is odd, then the n-tuple $(2, 2, \ldots, 2)$ is indeed good, while in case when n is even, any $\frac{n}{2}$ of the numbers add up to n, so in this case the n-tuple $(2, 2, \ldots, 2)$ is not good.