Problema săptămânii 135
Ana şi Bogdan joacă un joc. La început, Ana scrie pe tablă un număr natural nenul. Apoi, jucătorii mută alternativ, Bogdan mutâmd primul. La fiecare mutare a sa, Bogdan înlocuieşte numărul n de pe tablă cu un număr de forma $n-a^2$, unde a este un număr natural nenul. La fiecare mutare a ei, Ana înlocuieşte numărul n de pe tablă cu un număr de forma n^k, unde k este un număr natural nenul. Bogdan câştigă dacă numărul de pe tablă devine 0. Îl poate Ana împiedica pe Bogdan să câştige?

Maxim Didin (Rusia), Romanian Masters of Mathematics, 2019

Vă sfătuiesc să citiţi Soluţia oficială şi remarcile de după (în limba engleză).

Esenţialmente, sunt două linii care duc la rezolvare:
1. Bogdan poate diminua partea liberă de pătrate a numărului de pe tablă, iar Ana nu îl poate creşte.
2. Dacă numărul de pe tablă se scrie ca o sumă de pătrate, Bogdan poate diminua numărul de pătrate, în timp ce Ana nu îl poate creşte.

Soluţia oficială: (pe ideea 1)
Răspunsul este negativ. Pentru un număr natural nenul n, definim *partea sa liberă de pătrate* (*square-free part*), $S(n)$, ca fiind cel mai mic număr natural nenul a pentru care $\dfrac{n}{a}$ este pătrat perfect. Cu alte cuvinte, $S(n)$ este produsul tuturor factorilor primi care apar la putere impară în descompunerea în factori primi a lui n. (Dacă n este pătrat perfect, atunci $S(n) = 1$ şi convenim ca $S(0) = 0$.) În continuare, arătăm că:
(i) la fiecare mutare a ei, Ana nu poate mări partea liberă de pătrate şi
(ii) la fiecare mutare a sa, Bogdan poate înlocui numărul natural n de pe tablă cu un număr natural k cu $S(k) < S(n)$.
Astfel, dacă jocul începe cu un număr natural nenul N, Bogdan poate câştiga din cel mult $S(N)$ mutări.
Partea (i) este evidentă, deoarece definiţia părţii libere de pătrate implică $S(n^k) = S(n)$ dacă k este impar şi $S(n^k) = 1 \leq S(n)$ dacă k este par, oricare ar fi numărul natural nenul n.
Partea (ii) este de asemenea uşoară: dacă, înaintea mutării lui Bogdan, pe tablă este scris numărul $n = S(n) \cdot b^2$, atunci Bogdan îl poate înlocui cu $n' = n - b^2 = \big(S(n) - 1\big)b^2$, unde $S(n') \leq S(n) - 1$.

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel*), variantă a celei de mai sus
Vom demonstra că Bogdan poate mereu să câştige.
Pentru început, observăm că dacă, la un moment dat, pe tablă este scris numărul x, iar Ana îl ridică la puterea $2y$, cu $y \in \mathbb{N}^*$, atunci Bogdan va scădea $(x^y)^2$ obţinând 0 şi câştigând.
Vom presupune, aşadar, că Ana va ridica mereu numerele la o putere impară.
Vom arăta că Bogdan poate face o serie de m mutări prin care să câştige, unde

m este primul număr ales de Ana. Mai precis, vom arăta că Bogdan poate face o serie de m mutări astfel încât, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, m\}$, după mutarea numărul p a lui Bogdan, numărul rămas să fie de forma $(m-p)\cdot k^2$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, făcând demonstraţia prin inducţie simplă după p.
Pentru $p = 1$ afirmaţia este adevărată deoarece Bogdan scade 1^2.
Presupunem afirmaţia adevărată pentru un $q \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ şi o demonstrăm adevărată pentru $q + 1$.
Fie $(m - q) \cdot \ell^2$ numărul rămas după operaţia cu numărul q a lui Bogdan. Fie $\left[(m-q)\cdot \ell^2\right]^{2a+1}$, cu $a \in \mathbb{N}$, numărul rămas după mutarea Anei. Atunci Bogdan scade numărul $\left[(m-q)^2 \cdot \ell^{2a+1}\right]^2$; pe tablă rămâne numărul $\left[(m-q)\cdot \ell^2\right]^{2a+1} - \left[(m-q)^a \cdot \ell^{2a+1}\right]^2 = \left[(m-q)^a \cdot \ell^{2a+1}\right]^2 \cdot (m-q-1)$ şi demonstraţia este încheiată.
Dar după a m-a mutare a lui Bogdan, pe tablă rămâne un număr de forma $(m-m)\cdot z^2 = 0$.

Comentariu: Seamănă cu soluţia 1, dar în soluţia lui David nu contează dacă $m - p$ este sau nu liber de pătrate.

Soluţia 3: (ideea 2)
Dacă la vreuna din mutările ei, Ana alege un exponent par, Bogdan poate câştiga direct scăzând pătratul perfect lăsat de Ana.
Să presupunuem că Ana alege mereu un exponent impar.
Numărul iniţial, n, poate fi scris ca o sumă de n pătrate perfecte (toate egale cu 1).
Strategia lui Bogdan este aceea de a diminua numărul de pătrate din scrierea numărului de pe tablă ca sumă de pătrate. Astfel, dacă Ana îi lasă o sumă de k pătrate, el va scădea pur şi simplu unul dintre ele lăsând pe tablă o sumă de $k - 1$ pătrate.
Ridicând numărul de pe tablă la o putere impară, Ana nu poate mări numărul de pătrate din reprezentarea numărului de pe tablă: dacă ea primeşte $n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ şi ridică acest număr la o putere impară $2j + 1$, noul număr poate fi scris $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2)^{2j+1} = (n^j \cdot a_1)^2 + (n^j \cdot a_2)^2 + \ldots + (n^j \cdot a_k)^2$. Bogdan scade $(n^j \cdot a_k)^2$ şi micşorează numărul de pătrate cu 1, până când numărul de pe tablă va fi un pătrat perfect. Atunci Ana va lăsa la rândul ei un pătrat perfect, iar Bogdan va câştiga.

Remarcă: Şi aici se poate introduce $P(n)$, cel mai mic număr natural a pentru care n poate fi scris ca sumă de a pătrate perfecte şi observa că Ana nu creşte $P(n)$ în timp ce Bogdan poate diminua la fiecare mutare $P(n)$. Dar nu este esenţial ca numărul de pătrate cu care se lucrează să fie cel minimal.

Soluţia 4: (avansată)
Folosim teoremele de mai jos:
(Teorema celor 4 pătrate a lui Lagrange) Orice număr natural poate fi scris ca sumă de patru pătrate perfecte.

(Teorema celor 3 pătrate a lui Legendre) Un număr natural poate fi scris ca sumă de trei pătrate perfecte dacă şi numai dacă el **nu** este de forma $4^a(8b+7)$, cu $a, b \in \mathbb{N}$.
(Teorema sumei de două pătrate) Un număr natural se scrie ca sumă de două pătrate dacă şi numai dacă în descompunerea sa în factori primi nu apare niciun număr prim de forma $4k+3$ ridicat la o putere impară.

Dacă la vreuna din mutările ei, Ana alege un exponent par, Bogdan poate câştiga direct scăzând pătratul perfect lăsat de Ana.
Să presupunuem că Ana alege mereu un exponent impar.
Mai întâi, Bogdan scrie numărul lăsat de Ana ca o sumă de patru pătrate şi scade unul dintre ele.
Dacă la vreuna din mutările ei, Ana lasă o sumă de trei pătrate, Bogdan scade unul din ele şi o lasă pe Ana cu o sumă de două pătrate. Din identitatea lui Lagrange sau din teorema privitoare la suma de două pătrate rezultă că, orice ar face Ana, numărul lăsat de ea se va scrie ca o sumă de două pătrate. Atunci Bogdan va scădea unul dintre ele lăsându-i Anei un pătrat perfect. Ana va lăsa atunci tot un pătrat perfect, iar Bogdan va câştiga.
Aşadar, Ana trebuie să lase mereu un număr de forma $4^a(8b+7)$. Dar atunci Bogdan poate scădea 4^a, lăsând-o pe Ana cu $2^{2a+1}(4b+3)$. Pentru a transforma acest număr din nou într-unul de forma $4^a(8b+7)$, ea trebuie să facă exponentul lui 2 par, dar asta înseamnă să ridice numărul lăsat de Bogdan la o putere pară şi deci înfrângere imediată.
Bogdan poate scădea şi 4^{a+1}, lasând Anei $4^a(8b+3)$. Ridicat la o putere impară, acest număr va fi tot de forma $4^{a'}(8b'+3)$.

Problem of the week no. 135
Amy and Bob play a game. At the beginning, Amy writes down a positive integer on the board. Then the players take moves in turn, Bob moving first. On any move of his, Bob replaces the number n on the board with a number of the form $n-a^2$, where a is a positive integer. On any move of hers, Amy replaces the number n on the blackboard with a number of the form n^k, where k is a positive integer. Bob wins if the number on the board becomes zero. Can Amy prevent Bob's win?

Maxim Didin (Russia), Romanian Masters of Mathematics, 2019

See the Official solution and the Remarks.

Solution:
If on any of her moves Amy selects an even integer, Bob can win right away by subtracting the perfect square left by Amy.
Let us assume that Amy always chooses an odd integer.
The initial integer, n, can be written as a sum of n perfect squares (all equal to 1). If Amy leaves a sum of k squares, Bob's strategy will be to subtract one of them and to diminish the number of squares.

Lifting to an odd number, Amy can not increase the number of squares in the representation of the number on the board: if she receives $n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ and lifts it to an odd power, $2j+1$, the new number can be written $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2)^{2j+1} = (n^j \cdot a_1)^2 + (n^j \cdot a_2)^2 + \ldots + (n^j \cdot a_k)^2$. Bob subtracts $(n^j \cdot a_k)^2$ and diminishes the number of squares by one, until the number on the board becomes a perfect square. Then Amy will leave a perfect square herself, and Bob will win.

Solution: (advanced)
We use the following theorems:
(Lagrange's Four Square Theorem) Any number can be written as a sum of the squares of at most four positive integers.
(Legendre's Three Square Theorem) A number can be written as a sum of the squares of at most three positive integers if and only if it is not of the form $4^a(8b+7)$, with $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(Sum of Two Squares Theorem) An integer greater than one can be written as a sum of two squares if and only if its prime decomposition contains no prime congruent to 3 (mod 4) raised to an odd power.

If on any of her moves Amy selects an even integer, Bob can win right away by subtracting the perfect square left by Amy.
Let us assume that Amy always chooses an odd integer.
First, Bob writes the number he receives as a sum of 4 squares and subtracts one of them.
If Amy ever returns a number that can be written as a sum of three squares, Bob subtracts one of them leaving Amy with a sum of two squares. From the Lagrange identity (or the above theorem on the sum of two squares), it follows that the product of numbers that are sums of two squares is also a number that is a sum of two squares. Thus Amy will leave a sum of two squares. Bob subtracts one of them, giving Amy a perfect square. Whatever she does, she returns a perfect square to Bob who subtracts it and wins.
Thus, Amy must always leave a number of the form $4^a(8b+7)$. If she does so, Bob can simply subtract 4^a, leaving Amy with $2^{2a+1}(4b+3)$. In order to leave again a number of the form $4^a(8b+7)$, she needs to make the exponent of 2 even, but this means lifting to an even number and instant defeat.
Bob can also subtract 4^{a+1}, leaving Amy with $4^a(8b+3)$. Lifting this to an odd power yields $4^{a'}(8b'+3)$, which can be written as a sum of three squares.