Problema săptămânii 133

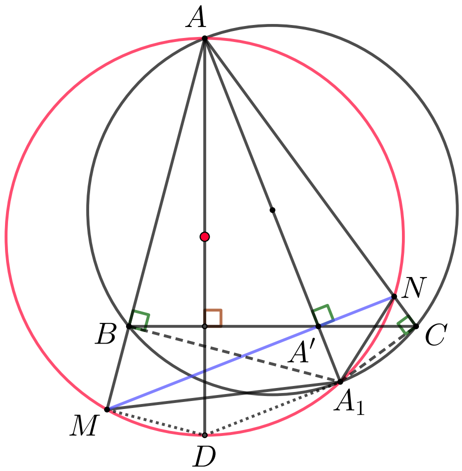
Fie A_1 punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC şi $\{A'\} = AA_1 \cap BC$. Perpendiculara prin A' pe AA_1 intersectează dreptele AB şi AC în M, respectiv N. Arătaţi că punctele A, M, A_1 şi N se află pe un cerc al cărui centru se găseşte pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

Olimpiadă Spania, 2016

Soluţie:

Deoarece $[AA_1]$ este diametru în cercul circumscris triunghiului ABC, unghiurile $\sphericalangle A_1BA$ şi $\sphericalangle A_1CA$ sunt drepte, aşadar punctele coliniare B, A', C sunt tocmai proiecţiile punctului A_1 pe dreptele suport ale laturilor triunghiului AMN. Conform *reciprocei teoremei lui Simson* rezultă că punctul A_1 se află pe cercul circumscris triunghiului AMN.

Dar $[AA']$ este înălţime în triunghiul AMN şi ştim că centrul cercului circumscris lui AMN se găseşte pe izogonala înălţimii din A relativ la unghiul $\sphericalangle MAN$. Ori din triunghiul ABC se vede că izogonala căutată este dreapta suport a înălţimii din A a triunghiului ABC.



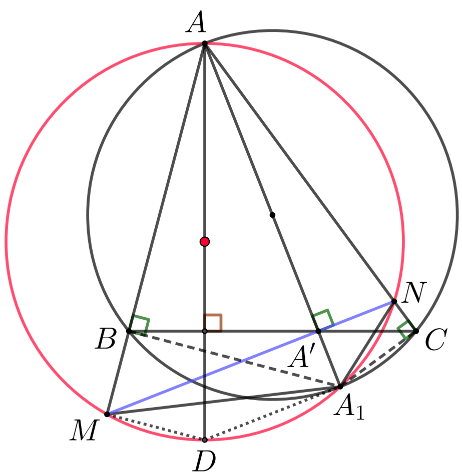
Observaţie: Configuraţia din problema mai are şi următoarele proprietăţi: dacă D este punctul diametral opus lui A în cercul circumscris lui AMN, atunci $MD \parallel BA_1$, $ND \parallel CA_1$ şi $MN \parallel DA_1$ (deci MDA_1N este trapez isoscel).

Remarcă Inscriptibilitatea cerută poate fi demonstrată uşor cu unghiuri (de exemplu redemonstrând rapid „dreapta lui Simson") sau cu puterea punctului: scriind puterea punctului A' faţă de patrulaterele inscriptibile $MBNC$ şi ABA_1C avem $A'M \cdot A'N = A'B \cdot A'C = A'A \cdot A'A_1$, ceea ce arată că A, M, A_1 şi N se află pe un cerc.

Problem of the week no. 133
In the circumcircle of a triangle ABC, let A_1 be the point diametrically opposed to the vertex A. Let A' the intersection point of AA_1 and BC. The perpendicular to the line AA' from A' meets the lines AB and AC at M and N, respectively. Prove that the points A, M, A_1 and N lie on a circle whose center lies on the height from A of the triangle ABC.

Spanish Mathematical Olympiad, 2016

Solution:
As $[AA_1]$ is a diameter of the circumcircle of triangle ABC, we have $\sphericalangle A_1BA = \sphericalangle A_1CA = 90°$, which shows that the points B, A', and C are the projections of point A_1 on the sides of triangle AMN. These points are collinear, which means, according to the *converse of the Simson line theorem*, that point A_1 lies on the circumcircle of triangle AMN.
But $[AA']$ is an altitude of triangle AMN and we know that the circumcenter of triangle AMN lies on the isogonal of the altitude from A with respect to the angle $\sphericalangle MAN$. But from triangle ABC it is easy to see that the desired isogonal is precisely the altitude from A of triangle ABC.



Other solutions can be found on AoPS.