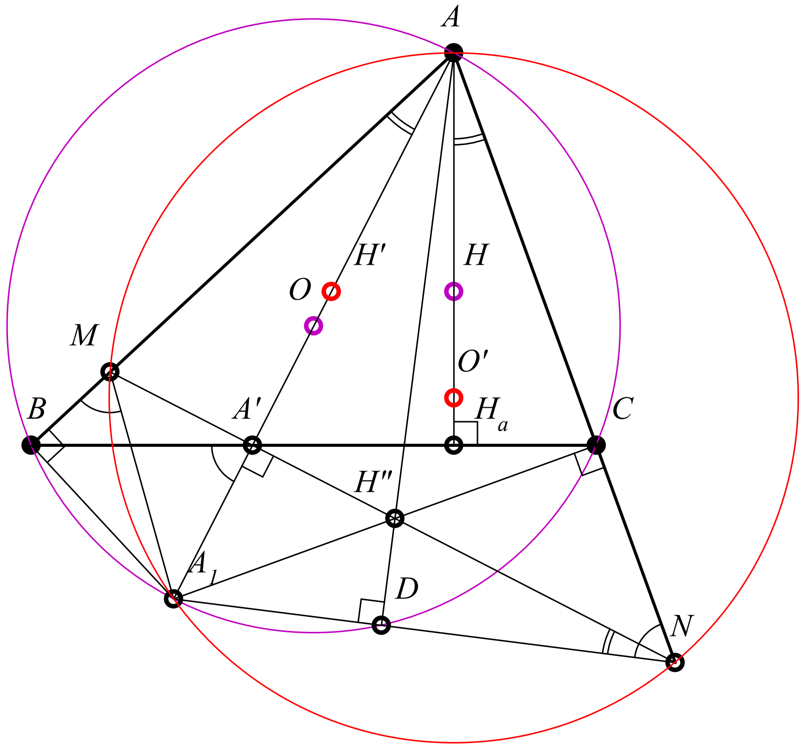
Problema săptămânii 133:

Fie A_1 – punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC şi $\{A'\} = AA_1 \cap BC$. Perpendiculara dusă prin A' pe AA_1 intersectează dreptele AB şi AC în M, respectiv N. Arătaţi că punctele A, M, A_1 şi N se află pe un cerc al cărui centru se găseşte pe înălţimea din A a triunghiului ABC.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): $[AA_1]$ – fiind un diametru al $\odot ABC$, avem:

$$A_1B \perp BA \ (1) \text{ şi } A_1C \perp AC. \ (2)$$

Aşa că din:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} MN \perp AA_1 \\ A_1B \perp AC \ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{NA'A_1} \equiv \widehat{ABA_1} \left(=90^0\right) \Rightarrow A_1A'MB - inscriptibil \Rightarrow \widehat{A_1MB} \equiv \underline{\widehat{A_1A'B}} \\ \left.\begin{array}{r} MN \perp AA_1 \\ A_1C \perp CA \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{NA'A_1} \equiv \widehat{NCA_1} \left(=90^0\right) \Rightarrow A_1NCA' - inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{A_1A'B}} \equiv \widehat{A_1NA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1MB} \equiv \widehat{A_1NA} \Rightarrow \boxed{AMA_1N - inscriptibil}.$$

Este ştiut faptul că în orice triunghi ortocentrul şi centrul cercului circumscris, sunt două puncte izogonale; aşa că în triunghiul ABC, avem: $\widehat{CAH} \equiv \widehat{OAB}$. (3)

Să mai observăm acum, că triunghiurile ABC şi AMN au unghiul din A – comun.

Pe de altă parte, întrucât $MN \perp AA'$ dreapta AA' – este înălţime a triunghiului ΔAMN, aşa că centrul O' – al cercului circumscris ΔAMN se găseşte înălţimea AH – a ΔABC (care este izogonala a dreptei $AO(=AA')$ faţă de unghiul comun al celor două triunghiuri $\left(\widehat{MAN} = \widehat{BAC}\right)$. ■