ALTE SOLUŢII ALE UNEI PROBLEME DATE LA CONCURSUL „STELELE MATEMATICII”

de MIRCEA LASCU, ZALĂU, RĂZVAN PUŞCAŞU, CONSTANŢA şi TITU ZVONARU, COMĂNEŞTI

În această notă, prezentăm mai multe soluţii ale unei probleme date în decembrie 2017 la proba pentru juniori a concursului „Stelele Matematicii”, altele decât cele două soluţii oficiale (vezi [3]). Iată enunţul problemei:

Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2(xy + yz + zx)$. Arătaţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq 3$ şi determinaţi cazurile de egalitate.

Vlad Robu

Soluţia 1:
Observăm că $\sum x^2 + 3 = 2\sum xy \Leftrightarrow \sum xy = \frac{1}{2}\big(\sum(x-y)^2\big) + 3 \geq 3 \Rightarrow \sum xy \geq 3$,
$\sum x^2 + 3 = 2\sum xy \Rightarrow 4\sum xy = (\sum x)^2 + 3 \geq 4 \cdot 3 \Rightarrow (\sum x)^2 \geq 9 \Rightarrow |\sum x| \geq 3$; dar $\sum x > 0 \Rightarrow \sum x \geq 3$.
Avem $\sum x^2 + 3 = 2\sum xy \Leftrightarrow 4xy = (x+y-z)^2 + 3 \Rightarrow 2\sqrt{xy} = \sqrt{(x+y-z)^2+3} = 2\sqrt{\frac{(x+y-z)^2+1+1+1}{4}} \geq 2 \cdot \frac{|x+y-z|+1+1+1}{4}$.
Adunând cu analoagele rezultă $2\sum\sqrt{xy} \geq \frac{1}{2}\big(\sum|x+y-z| + 9\big) \geq \frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{1}{2}|x+y-z+y+z-x+z+x-y| = \frac{9}{2} + |x+y+z| \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$, de unde rezultă că $\sum\sqrt{xy} \geq 3$.
Egalitatea are loc dacă $|x+y-z| = |y+z-x| = |z+x-y| = 1$ şi $\sum x = 3$ şi $x+y-z = y+z-x = z+x-y$, deci pentru $x = y = z = 1$.

Soluţia 2:
Avem $(x+y+z)^2 \geq 9 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, deci $x+y+z \geq 3$ (1).
Deoarece $4xy = (x+y-z)^2 + 3$, folosind inegalitatea lui Minkovski şi inegalitatea (1), obţinem $\sum\sqrt{4xy} = \sum\sqrt{(x+y-z)^2+3} \geq$

$$\sqrt{(x+y-z+x-y+z-x+y+z)^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3})^2} =$$

$$\sqrt{(x+y+z)^2+27} \geq \sqrt{9+27} = 6.$$

Soluţia 3:
Din relaţia $2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2=3$, folosind formula lui Heron, rezultă că $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ sunt laturile unui triunghi cu aria $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
Folosind inegalitatea $ab+bc+ca \geq 4S\sqrt{3}$ (itemul 4.5 din [1]), rezultă inegalitatea din enunţ.

Se poate demonstra o inegalitate mai tare decât cea din enunţ, şi anume că dacă $x, y, z > 0$ sunt trei numere reale astfel încât $x^2+y^2+z^2+3 = 2(xy+yz+zx)$, atunci

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \geq \sqrt{9+x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}.$$

Soluţie:
Prin omogenizare, după ridicare la pătrat inegalitatea se scrie

$$(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2 \geq 3(2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2)+x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) \geq 2(xy+yz+zx)-2x\sqrt{yz}-2y\sqrt{zx}-2z\sqrt{xy}$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq z(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+x(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+y(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2$$

$$(y+2\sqrt{yz}+z-x)(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(z+2\sqrt{zx}+x-y)(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2+$$
$$(x+2\sqrt{xy}+y-z)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Notăm $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$. Avem de demonstrat că

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0 \tag{1}$$

unde $S_a = b^2+2bc+c^2-a^2$, $S_b = c^2+2ca+a^2-b^2$, $S_c = a^2+2ab+b^2-c^2$.
Presupunem că $a \geq b \geq c$. Deoarece $S_b \geq 0$, $S_b+S_a \geq 0$, $S_b+S_c \geq 0$, inegalitatea (1) este adevărată.
S-a folosit metoda SOS. Pentru mai multe detalii, a se consulta [2].

Este evident că inegalitatea de mai sus o implică pe cea dată în concurs deoarece $\sqrt{9+x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx} \geq 3$.

BIBLIOGRAFIE

[1] **O. Bottema et al.** - *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969

[2] https://artofproblemsolving.com/community/c6h80127_sos__sum_of_squares

[3] ssmr.ro/files/olimpiade/Stelele_Matematicii/2017/Stelele_Matematicii_2017.pdf