BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 7 mai 2016 (barajul 4)

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale nenule x, y, z care satisfac ecuaţia

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Problema 2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$ şi $a + b + c = 0$, demonstraţi că

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 3.$$

Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$. $[AD]$, $[AH]$ şi $[AM]$ sunt înălţimea, bisectoarea, respectiv mediana din A. Perpendiculara din M pe AH intersectează dreapta AH în Z şi dreapta AD în E. Perpendiculara din H pe AM intersectează AM în L. Dacă K este intersecţia dintre mediatoarea segmentului $[BC]$ şi bisectoarea AH, demonstraţi că:
a) dreapta HL trece prin punctul E;
b) $m(\sphericalangle HLZ) = m(\sphericalangle AKM) = \frac{m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)}{2}$.

Problema 4. O tablă $n \times n$ $(n \geq 3)$ este împărţită în n^2 pătrăţele unitate. În fiecare pătrăţel se scrie câte un număr natural din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât sumele numerelor din fiecare pătrat 2×2 să fie diferite două câte două. Determinaţi valorile lui n pentru care există astfel de completări.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale nenule x, y, z care satisfac ecuaţia
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Soluţie:
Datorită simetriei ecuaţiei de mai sus, putem rezolva ecuaţia în cazul $x \leq y \leq z$ şi apoi să luăm permutările tuturor soluţiilor găsite.
Dacă $x \geq 7$, atunci $y, z \geq 7$ şi
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{3}{7} < \frac{1}{2},$$
ceea ce nu convine.
Dacă $x \leq 2$, atunci
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,$$
ceea ce nu convine.
Aşadar, $x \in \{3,4,5,6\}$.
• Dacă $x=3$, atunci
$$\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} &\Rightarrow 6y+6z=yz\\ &\Rightarrow (y-6)(z-6)=36\\ &\Rightarrow (y-6,\ z-6) \in \{(1,36),(2,18),(3,12),(4,9),(6,6)\}\\ &\Rightarrow (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \{(\mathbf{7},\mathbf{42}),(\mathbf{8},\mathbf{24}),(\mathbf{9},\mathbf{18}),(\mathbf{10},\mathbf{15}),(\mathbf{12},\mathbf{12})\}.\end{aligned}$$
• Dacă $x=4$, atunci
$$\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4} &\Rightarrow 4y+4z=yz\\ &\Rightarrow (y-4)(z-4)=16\\ &\Rightarrow (y-4,\ z-4) \in \{(1,16),(2,8),(4,4)\}\\ &\Rightarrow (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \{(\mathbf{5},\mathbf{20}),(\mathbf{6},\mathbf{12}),(\mathbf{8},\mathbf{8})\}.\end{aligned}$$
• Dacă $x=5$, atunci
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$
Dacă $y \geq 8$, atunci $z \geq 8$ şi
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4} < \frac{3}{10},$$
ceea ce nu convine.
Aşadar, $y \in \{5,6,7\}$. Dacă $y=5$ atunci $z=10$.
Dacă $y=6$, rezultă $z=\frac{15}{2}$, care nu convine.

Dacă $y = 7$, rezultă $z = \frac{70}{11}$, care nu convine.
Aşadar, $(y, z) = (5, 10)$.
• Dacă $x = 6$, atunci

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} &\Rightarrow 3y + 3z = yz \\ &\Rightarrow (y-3)(z-3) = 9 \\ &\Rightarrow (y-3,\ z-3) \in \{(1,9),(3,3)\} \\ &\Rightarrow (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \{(\mathbf{4},\mathbf{12}),(\mathbf{6},\mathbf{6})\}.\end{aligned}$$

Însă $(4, 12)$ nu satisface condiţia $x \leq y$, deci rămâne numai $\mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{6}$.
În concluzie, soluţiile sunt tripletele $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 10)$, $(6, 6, 6)$ şi permutările acestora.

Problema 2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$ şi $a + b + c = 0$, demonstraţi că

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 3.$$

Soluţie:
Fie x, y, z numere reale nenegative. Atunci avem succesiv:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2xy \\ y^2 + z^2 &\geq 2yz \\ z^2 + x^2 &\geq 2zx. \end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, obţinem $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$, adică

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2. \qquad (1)$$

Luăm în (1) $x = \sqrt{4a+1}$, $y = \sqrt{4b+1}$, $z = \sqrt{4c+1}$ şi obţinem
$(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2 \leq 3\left[(\sqrt{4a+1})^2 + (\sqrt{4b+1})^2 + (\sqrt{4c+1})^2\right]$ sau
$(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2 \leq 3[3(a+b+c) + 3]$ şi, deoarece $a + b + c = 0$, am obţinut

$$\left(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}\right)^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 3.$$

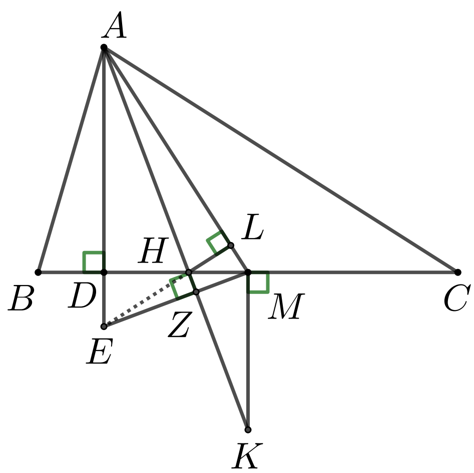
Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$. $[AD]$, $[AH]$ şi $[AM]$ sunt înălţimea, bisectoarea, respectiv mediana din A. Perpendiculara din M pe AH intersectează dreapta AH în Z şi dreapta AD în E. Perpendiculara din H pe AM intersectează AM în L. Dacă K este intersecţia dintre mediatoarea segmentului $[BC]$ şi bisectoarea AH, demonstraţi că:
a) dreapta HL trece prin punctul E;
b) $m(\sphericalangle HLZ) = m(\sphericalangle AKM) = \frac{m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)}{2}$.
Soluţie:

a) Punctul H este ortocentrul triunghiului AEM deoarece AZ şi MD sunt înălţimi. Cum HL este perpendiculară pe AM, ea este cea de-a treia înălţime a triunghiului, prin urmare trece prin vârful E.
b) Patrulaterul $HLMZ$ este inscriptibil deoarece $m(\sphericalangle HLM)+m(\sphericalangle HZM) = 90°+90° = 180°$. Atunci
$m(\sphericalangle HLZ) = m(\sphericalangle HMZ) = 90° - m(\sphericalangle MHZ) = m(\sphericalangle ZKM) = m(\sphericalangle AKM)$ (1).
De asemenea, $\sphericalangle AKM \equiv \sphericalangle DAH$ (alterne interne, $AD \parallel KM$) (2)
şi

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle DAH) &= m(\sphericalangle BAH) - m(\sphericalangle BAD) \\ &= \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} - \big(90° - m(\sphericalangle ABC)\big) \\ &= \frac{m(\sphericalangle A)}{2} - 90° + m(\sphericalangle B) \\ &= \frac{m(\sphericalangle A)}{2} - \frac{m(\sphericalangle A)}{2} - \frac{m(\sphericalangle B)}{2} - \frac{m(\sphericalangle C)}{2} + m(\sphericalangle B) \\ &= \frac{m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)}{2}. \qquad (3) \end{aligned}$$

(Am notat cu $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ unghiurile triunghiului ABC.)
Din (1), (2) şi (3) rezultă

$$m(\sphericalangle HLZ) = m(\sphericalangle AKM) = \frac{m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)}{2}.$$



Problema 4. O tablă $n \times n$ ($n \geq 3$) este împărţită în n^2 pătrăţele unitate. În fiecare pătrăţel se scrie câte un număr natural din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât sumele numerelor din fiecare pătrat 2×2 să fie diferite două câte două. Determinaţi valorile lui n pentru care există astfel de completări.

Soluţie:
Numărul pătratelor 2×2 existente pe o tablă $n \times n$ este $(n-1)^2$. Toate sumele corespunzătoare acestor pătrate trebuie să se afle printre numerele $0, 1, 2, \ldots 4n$. Conform cerinţelor problemei, sumele din pătratratele 2×2 trebuie să fie diferite două câte două. Rezultă că $(n-1)^2 \leq 4n+1$, de unde $n(n-6) \leq 0$, sau $n \leq 6$.şi, cum $n \geq 3$, rezultă $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Mai jos sunt prezentate exemple de astfel de pătrate pentru aceste patru valori:

1	1	1
1	0	0
0	0	0

$n = 3$

0	0	2	0
0	0	0	2
0	1	2	2
2	2	2	2

$n = 4$

0	0	2	0	4
0	0	0	2	1
0	1	2	2	4
2	2	3	3	4
4	3	4	4	4

$n = 5$

6	6	6	6	5	5
6	6	5	5	5	5
1	2	3	4	4	5
3	5	0	5	0	5
1	0	2	1	0	0
1	0	1	0	0	0

$n = 6$