

Problema 1. Fie a și b două numere naturale nenule cu proprietatea că ab divide $a^2 + b^2$. Arătați că $a = b$.

Problema 2.

a) Arătați că dacă $a, b, c \geq 1$, atunci $a + b + c + 3abc \geq 2(ab + bc + ca)$. Când are loc egalitatea?

b) Arătați că dacă $a, b, c \in [0, 1]$, atunci $a + b + c + 3abc \geq 2(ab + bc + ca)$. Când are loc egalitatea?

c) Este adevărat că $a + b + c + 3abc \geq 2(ab + bc + ca)$, pentru orice $a, b, c \geq 0$?

Problema 3.

Fie ABC un triunghi de arie 1. Notăm cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului C . Determinați aria triunghiului AMC .

Problema 4. Un pătrat 3×3 este împărțit în nouă pătrățele 1×1 . Fie M mulțimea centrelor acestor nouă pătrățele.

a) Arătați că există 6 pătrate care au toate vârfurile în mulțimea M .

b) Pe fiecare punct din mulțimea M se scrie unul din numerele de la 1 la 9 astfel încât fiecare număr să fie folosit exact o dată și, pentru fiecare din cele șase pătrate care au vârfurile în M , suma numerelor scrise pe cele patru vârfuri ale sale să fie aceeași.

În câte moduri se poate face etichetarea vârfurilor ca să fie îndeplinite condițiile de mai sus?