Problema săptămânii 131
Dacă m, n sunt numere naturale nenule distincte, demonstraţi că

$$(m, n) + (m + 1, n + 1) + (m + 2, n + 2) \leq 2|m - n| + 1.$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă India, 2019

Soluţie:
Dacă $m > n$, notăm $m-n = k$. Trebuie să arătăm că $(k, m)+(k, m+1)+(k, m+2) \leq 2k + 1$. Dacă cel puţin doi dintre termenii din membrul drept sunt mai mici decât k, ei sunt cel mult $k/2$, deci suma e cel mult $2k$. Rămâne cazul când cel puţin doi termeni sunt egali cu k. Dacă k divide două dintre numerele m, $m + 1$ şi $m + 2$ atunci k divide şi diferenţa lor, deci $k = 1$ sau $k = 2$.
Dacă $k = 2$ şi m este par, atunci avem egalitate: $2 + 1 + 2 = 2k + 1$.
Dacă $k = 2$ şi m este impar, inegalitatea este stictă: $1 + 2 + 1 < 5$.
Dacă $k = 1$ atunci avem egalitate: $1 + 1 + 1 = 2k + 1$.
În concluzie, inegalitatea are loc în toate cazurile, cu egalitate dacă m şi n sunt numere consecutive sau numere pare consecutive.

Problem of the week no. 131
If m and n are distinct positive integers, prove that

$$(m, n) + (m + 1, n + 1) + (m + 2, n + 2) \leq 2|m - n| + 1.$$

When does equality hold?

Indian Mathematical Olympiad, 2019

Solution:
If $m > n$, put $m-n = k$. We must prove that $(k, m)+(k, m+1)+(k, m+2) \leq 2k+1$. If at least two of the summands are less than k, they are at most $k/2$, hence the sum is at most $2k$. This leaves the case when at least two of the summands are equal to k. If k divides two of the numbers m, $m+1$ and $m+2$ then k also divides their difference, hence $k = 1$ or $k = 2$.
If $k = 2$ and m is even, we have equality: $2 + 1 + 2 = 2k + 1$.
If $k = 2$ and m is odd, the inequality is strict: $1 + 2 + 1 < 5$.
If $k = 1$ we have equality: $1 + 1 + 1 = 2k + 1$.
In conclusion, the inequality holds in all cases and it is satisfied with equality if m and n are either consecutive positive integers or positive consecutive even integers.