Problema săptămânii 132

Iniţial toate pătrăţelele unitate ale unei table 13×13 sunt colorate, unele cu roşu, celelalte cu albastru. Putem efectua două tipuri de mutări:
- alegem un pătrat 9×9 şi schimbăm culoarea fiecăruia din cele 81 de pătrăţele ale sale: dacă a fost roşu, îl facem albastru, iar dacă a fost albastru, îl facem roşu;
- alegem un pătrat 2×2 şi schimbăm culoarea fiecăruia din cele 4 pătrăţele ale sale.

Stabiliţi dacă, printr-o succesiune de astfel de mutări, tabla poate fi făcută complet roşie pornind de la orice colorare iniţială a pătrăţelelor tablei.

Soluţia 1: (*Radu Lecoiu*)

Vom arăta că nu pornind de la orice configuraţie iniţială se poate face tabla complet roşie.

Numerotăm coloanele cu numerele de la 1 la 13 şi marcăm cu x pătrăţelele unitate situate pe coloanele 2, 7 şi 11.

Orice mutare corespunzătoare unui pătrat 9×9 schimbă culoarea a 18 dintre pătrăţelele marcate cu x, fie a 9 pătrăţele de pe coloana 2 şi a 9 pătrăţele de pe coloana 7, fie a câte 9 pătrăţele de pe coloanele 7 şi 11.

Orice mutare corespunzătoare unui pătrat 2×2 schimbă culoarea a 0 sau 2 pătrăţele marcate cu x. Prin urmare, nicio mutare nu schimbă paritatea numărului de pătrăţele marcate cu x care sunt roşii. Configuraţia la care ar trebui să ajungem cuprinde 39 de pătrăţele roşii marcate cu x, adică un număr impar. Dacă iniţial pe tablă avem un număr par de pătraţele roşii marcate cu x, atunci prin asemenea mutări nu putem modifica paritatea numărului de pătrăţele roşii marcate cu x, deci nu putem ajunge la o tablă complet roşie.

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel*)

Observăm că ordinea efectuării mutărilor nu contează, contează numai care au fost mutările efectuate. De asemenea, putem presupune că nu am efectuat de două ori o mutare asupra aceluiaşi pătrat deoarece cu asta nu am schimbat nimic. Aşadar fiecare mutare va fi făcută de 0 sau 1 ori.

Pe tablă sunt $(13-9+1)^2 = 25$ pătrate 9×9 şi $(13-2+1)^2 = 144$ de pătrate 2×2, prin urmare există 169 de pătrate asupra cărora se pot face mutări, deci sunt 2^{169} succesiuni de asemenea mutări.

De asemenea, tabla are 169 de pătrăţele şi fiecare poate avea două culori, deci sunt 2^{169} colorări posibile ale acesteia.

Acum arătăm că există două succesiuni de mutări în urma cărora se obţine aceeaşi colorare a tablei dacă sunt aplicate unei table complet roşii.

1) Dacă efectuăm 4 mutări, câte una asupra fiecăruia din cele 4 pătrate 9×9 care conţin pătrăţelele unitate din cele 4 colţuri ale tablei, efectul va fi că pătrăţelele aflate în cele patru pătrate 4×4 din colţurile tablei devin albastre, în vreme ce celelalte pătrăţele rămân roşii (asupra acestora s-au efectuat fie 2, fie 4 mutări).

2) Dacă efectuăm 16 mutări de tip 2×2, câte patru asupra fiecăruia din cele patru pătrate 4×4 situate în colţurile tablei, efectul este acelaşi ca şi cel al succesiunii de la 1).

În concluzie, există două succesiuni de transformări care duc la aceeaşi colorare, dar sunt la fel de multe succesiuni ca şi colorări, prin urmare există o colorare care nu corespunde niciunei succesiuni, adică există o configuraţie la care nu se poate ajunge pornind de la o tablă roşie prin nicio succesiune de transformări. Atunci nu există nici, invers, o succesiune de transformări de la respectiva configuraţie la tabla complet roşie.

Problem of the week no. 132
Initially all the unit squares of a 13×13 board are colored, some with red, the others with blue. We can perform two types of moves:
- we can choose a 9×9 square and change the color of each of its 81 unit squares (from red to blue and from blue to red)
- we can chose a 2×2 square and change the color ot its 4 unit squares.
Decide whether it is always possible to make the board completely red by performing a succession of such moves, regardless of the initial coloring of the board.

Soluţia 1: (*Radu Lecoiu*)
We prove that one can not obtain a completely red board starting from any initial coloring of the board.
We label the columns, in order, from 1 through 13 and mark by x all the unit squares situated on columns 2, 7, and 11.
Any move corresponding to a 9×9 square changes the color of 18 of the squares marked by x, (either of 9 unit squares on column 2 and 9 on column 7, or 9 unit squares on column 7 and 9 more on column 11).
Any move corresponding to a $2\times$ changes the color of either 0 or 2 of the squares marked by x. Hence, no move can change the parity of the number of red unit squares that are marked by x. The final configuration one is supposed to obtain, contains 39 red unit squares that are marked by x, i.e. an odd number of such squares. If initially the number of red unit squares that are marked by x is even, then this number stays even, so one can not get to a board that is completely red.

Solution 2: (taken from here)
It is not possible. The total number of lighting configurations in the grid is 2^{169}. We will show that the number of configurations achievable using the switches is less than 2^{169}.
We first observe that we never need to use a given switch more than once. If we flip it an even number of times, it has no net effect; if we flip it an odd number of times, it has the same effect as flipping it once. Secondly, we observe that the order in which we flip switches has no effect, since all the matters for any given light is the number of times it is reversed. Together, these observations imply that all achievable configurations can be obtained by flipping some subset of the switches one time each, in any order.
The total number of switches is $(13-9+1)^2 + (13-2+1)^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, which means there are 2^{169} subsets of switches we may choose from. In order to show that the number of available lightings is strictly less than 2^{169}, we need to

find two unequal sets of switches that result in the same lighting. One example is as follows: we can get all lights except the center 5×5 square to be on in 2 ways. One is to light the lower-left and upper-right 9×9 squares, then light the upper-left and lower-right 4×4 squares (using the 2×2 squares). This same lighting can be achieved by rotating the above example by 90°. Thus, there are at most $2^{169} - 1$ available patterns.