Problema săptămânii 130
Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi că
$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$
din cartea [1]

Soluţia 1:
Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune $a \leq b \leq c$.
Atunci $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$ şi $\frac{a}{b+c-a} \leq \frac{b}{c+a-b} \leq \frac{c}{a+b-c}$.
Într-adevăr, efectuând calculele, avem
$\frac{a}{b+c-a} \leq \frac{b}{c+a-b} \Leftrightarrow ac+a^2-ab \leq b^2+bc-ba \Leftrightarrow (a-b)(a+b+c) \leq 0.$
Atunci, din inegalitatea lui Cebâşev, avem $\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)} = \frac{1}{b+c}\cdot\frac{a}{b+c-a}+\frac{1}{c+a}\cdot\frac{b}{c+a-b}+\frac{1}{a+b}\cdot\frac{c}{a+b-c} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\right).$
Din inegalitatea CBS (forma Titu Andreescu) avem
$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$
şi
$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} = \frac{a^2}{ab+ac-a^2}+\frac{b^2}{bc+ab-b^2}+\frac{c^2}{ac+bc-c^2} \geq$$
$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2} \geq 3,$$
ultima inegalitate revenind la $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.
Prin înmulţire obţinem inegalitatea dorită. Egalitate avem dacă $a=b=c$, adică pentru lungimile laturilor unui triunghi echilateral.

Soluţia 2:
Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune $a \leq b \leq c$.
Atunci $\frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{c}{a+b}$ şi $\frac{1}{b+c-a} \leq \frac{1}{c+a-b} \leq \frac{1}{a+b-c}$.
Într-adevăr, efectuând calculele, avem
$$\frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{c+a} \Leftrightarrow ac+a^2 \leq b^2+bc \Leftrightarrow (a-b)(a+b+c) \leq 0.$$
Atunci, din inegalitatea lui Cebâşev, obţinem
$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)} =$$

$$\frac{a}{b+c}\cdot\frac{1}{b+c-a}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{1}{c+a-b}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b-c}\geq$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right).$$

Din inegalitatea CBS (forma Titu Andreescu) avem

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

şi din inegalitatea lui Nesbitt, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.
Prin înmulţire obţinem inegalitatea dorită. Egalitate avem dacă $a=b=c$, adică pentru lungimile laturilor unui triunghi echilateral.

Soluţia 3: (*Radu Lecoiu*)
Amplificăm fracţiile cu a, b, respectiv c, apoi aplicăm inegalitatea Titu Andreescu (Bergström):
$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)}=\frac{a^2}{a(b+c)(b+c-a)}+$
$\frac{b^2}{b(c+a)(c+a-b)}+\frac{c^2}{c(a+b)(a+b-c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{6abc}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $(a+b+c)^3\geq 27abc$ care este inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică.

Soluţia 4:
Inegalitatea se poate scrie

$$\frac{1}{b+c-a}-\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a-b}-\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

În mod evident avem $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ (*)
(Titu Andreescu sau media armonică este cel puţin cât cea aritmetică).
Tot din inegalitatea lui Titu Andreescu rezultă că
$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}$ (**).
Într-adevăr, avem $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{16}{2(a+b)}=\frac{8}{a+b}$.
Adunând această inegalitate cu analoagele ei şi împărţind la 2 obţinem inegalitatea (**). Adunând (*) şi (**) obţinem inegalitatea cerută.

Soluţia 5: (din cartea [1])
Fie $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, cu $x,y,z>0$. Inegalitatea de demonstrat fiind omogenă, putem la nevoie înlocui variabilele x,y,z cu αx, αy, αz şi alege α astfel

încât $\alpha(x+y+z)=3$ (α se simplifică şi se ajunge la aceeaşi inegalitate). Cu alte cuvinte, putem considera că $x+y+z=3$. Inegalitatea devine

$$\frac{3-x}{(3+x)x}+\frac{3-y}{(3+y)y}+\frac{3-z}{(3+z)z}\geq\frac{3}{2}.$$

Intuim că avem egalitate dacă $x=y=z=1$ şi atunci căutăm $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{3-t}{(3+t)t}\geq mt+n,\quad \forall\, t\in(0,3).$$

Inegalitatea revine la $mt^3+(3m+n)t^2+(3n+1)t-3\leq 0$ şi vrem ca $t=1$ să fie rădăcină dublă.

Folosind eventual schema lui Horner, se găsesc $m=-\dfrac{7}{8}$, $n=\dfrac{11}{8}$.

Astfel, inegalitatea de mai sus revine la $(t-1)^2(-7t-24)\leq 0$ care este adevărată. Am demonstrat aşadar că $\dfrac{3-t}{(3+t)t}\geq\dfrac{-7t+11}{8}$, $\forall\, t\in(0,3)$. Scriind această relaţie pe rând pentru x,y,z în loc de t şi adunând, obţinem (folosind din nou că $x+y+z=3$) inegalitatea dorită. Egalitate avem dacă $x=y=z$ (nu neapărat egale cu 1), adică $a=b=c$.

O soluţie asemănătoare a dat şi *Dacian Robu* care a presupus $x+y+z=1$ (în loc de $x+y+z=3$) şi a folosit că, în acest caz, $\dfrac{1-t}{t(1+t)}\geq\dfrac{33-63t}{8}$.

Soluţia 6: *Titu Zvonaru* ne trimite şi următoarea **întărire** a inegalităţii din enunţ:

Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi că

$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)}\geq$$
$$\frac{9}{2(a+b+c)}+\frac{34}{9(a+b+c)}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Deoarece $\dfrac{a}{(b+c)(b+c-a)}=\dfrac{1}{b+c-a}-\dfrac{1}{b+c}$, inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b+c-a}-\frac{9}{a+b+c}\geq\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\frac{9}{2(a+b+c)}+$$
$$\frac{34}{9(a+b+c)}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)},\quad (*)$$

adică, înmulţind cu $9(a+b+c)$,

$$\sum_{cyc}\frac{36(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}\geq\sum_{cyc}\frac{9(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\sum_{cyc}\frac{15(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Pentru a demonstra această inegalitate este suficient să demonstrăm că

$$\frac{36}{(b+c-a)(c+a-b)} \geq \frac{9}{2(b+c)(c+a)} + \frac{34}{(b+c-a)(c+a-b)},$$

adică $\dfrac{2}{(b+c-a)(c+a-b)} \geq \dfrac{9}{2(b+c)(c+a)}$.
Această inegalitate revine la $4c^2+4ab+4bc+4ca \geq 9c^2-9a^2-9b^2+18ab$, adică la $9a^2+9b^2+4bc+4ca \geq 5c^2+18ab$. Ori $a+b>c$ implică $4ac+4bc>4c^2$, $2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2 > c^2$ şi avem şi $7a^2+7b^2 \geq 14ab$.

Identităţile folosite la rescrierea inegalităţii $(*)$ pot fi verificate direct; iată o cale de a o obţine pe prima dintre ele:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b+c-a} - \frac{9}{a+b+c} = \sum_{cyc}\left(\frac{1}{b+c-a} - \frac{3}{a+b+c}\right) =$$

$$\sum_{cyc}\frac{2(a-b)+2(a-c)}{(a+b+c)(b+c-a)} = \frac{2}{a+b+c}\left(\sum_{cyc}\frac{a-b}{b+c-a} + \sum_{cyc}\frac{a-c}{b+c-a}\right) =$$

$$\frac{2}{a+b+c}\left(\sum_{cyc}\frac{a-b}{b+c-a} + \sum_{cyc}\frac{b-a}{c+a-b}\right) = \frac{4}{a+b+c}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Bibliografie:

[1] **Ivailo Kortezov, Svetlozar Doichev** – *Matematică pentru pregătirea olimpiadelor şcolare şi a Balcaniadei pentru juniori*, ed. SITECH, Craiova, 2011, pag 34

Problem of the week no. 130
Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle. Prove that

$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)} + \frac{b}{(c+a)(c+a-b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Solution 1:
The inequality being symmetric, we may assume $a \leq b \leq c$. Then, $\dfrac{1}{b+c} \leq \dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{1}{a+b}$ and $\dfrac{a}{b+c-a} \leq \dfrac{b}{c+a-b} \leq \dfrac{c}{a+b-c}$. Indeed, after some computations, $\dfrac{a}{b+c-a} \leq \dfrac{b}{c+a-b} \Leftrightarrow ac+a^2-ab \leq b^2+bc-ba \Leftrightarrow (a-b)(a+b+c) \leq 0$. Then, from Chebyshev's inequality we obtain $\dfrac{a}{(b+c)(b+c-a)} + \dfrac{b}{(c+a)(c+a-b)} + \dfrac{c}{(a+b)(a+b-c)} = \dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{1}{c+a}\cdot\dfrac{b}{c+a-b} + \dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{c}{a+b-c} \geq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}\right)\left(\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{c+a-b} + \dfrac{c}{a+b-c}\right)$.

From CBS (Titu's Lemma) we have $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$ and $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=\frac{a^2}{ab+ac-a^2}+\frac{b^2}{bc+ab-b^2}+\frac{c^2}{ac+bc-c^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2}\geq 3$, the last inequality being equivalent to $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.
By multiplication we obtain the desired inequality. Equality holds for $a=b=c$, i.e. for an equilateral triangle.

Solution 2:
The inequality being symmetric, we may assume $a\leq b\leq c$. Then $\frac{a}{b+c}\leq\frac{b}{c+a}\leq\frac{c}{a+b}$ and $\frac{1}{b+c-a}\leq\frac{1}{c+a-b}\leq\frac{1}{a+b-c}$. Indeed, after some computations, we have $\frac{a}{b+c}\leq\frac{b}{c+a}\Leftrightarrow ac+a^2\leq b^2+bc\Leftrightarrow(a-b)(a+b+c)\leq 0$. Then, from Chebyshev's inequality we obtain $\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)}=\frac{a}{b+c}\cdot\frac{1}{b+c-a}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{1}{c+a-b}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$.
From CBS (Titu's Lemma) we have $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, and from Nesbitt's inequality, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.
By multiplication we obtain the desired inequality. Equality holds for $a=b=c$, i.e. for an equilateral triangle.

Solution 3:
We use Titu's Lemma:
$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(c+a)(c+a-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)}=\frac{a^2}{a(b+c)(b+c-a)}+\frac{b^2}{b(c+a)(c+a-b)}+\frac{c^2}{c(a+b)(a+b-c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{6abc}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$, the last inequality being equivalent to $(a+b+c)^3\geq 27abc$ which is the HM-AM inequality.

Solution 4:
The inequality can be written $\frac{1}{b+c-a}-\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$.
Obviously $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ (*)
(Titu's Lemma or HM-AM inequality). Also from Titu's Lemma it follows that

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\qquad(**).$$

Indeed, adding $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{16}{2(a+b)}=\frac{8}{a+b}$ to its analogues and dividing by 2 gives (**). Summing (*) and (**) we obtain the desired result.