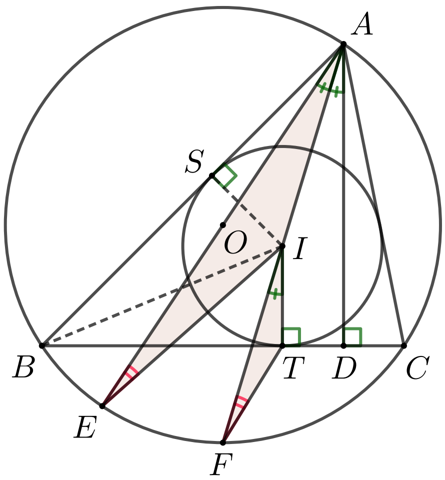
Problema săptămânii 129
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, O centrul cercului circumscris şi I centrul cercului înscris în triunghi. Notăm cu E şi F intersecţiile semidreptelor $(AO$, respectiv $(AI$ cu cercul circumscris şi cu T punctul de contact al cercului înscris cu latura BC. Arătaţi că unghiurile $\sphericalangle AEI$ şi $\sphericalangle IFT$ sunt congruente.

Soluţie:
Dacă $AB = AC$, unghiurile au măsura de $0°$ aşa că nu avem ce demonstra.
Vom demonstra că triunghiurile AEI şi IFT sunt asemenea, de unde va rezulta concluzia dorită.
Fie D piciorul înălţimii din A. Se ştie că $(AO$ şi $(AD$ sunt izogonale, adică $\sphericalangle IAO \equiv \sphericalangle IAD$. Cum IT este paralelă cu AD, avem $\sphericalangle FIT \equiv \sphericalangle FAD \equiv \sphericalangle EAI$.
De asemenea, se ştie (şi se arată uşor) că $FI = FC = 2R\sin\frac{A}{2}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă S este punctul de tangenţă al cercului înscris cu latura AB, atunci $IT = IS$, deci

$$\frac{IT}{AI} = \frac{IS}{AI} = \sin\frac{A}{2} = \frac{FI}{2R} = \frac{FI}{EA}.$$

Relaţia de mai sus, împreună cu congruenţa unghiurilor $\sphericalangle FIT$ şi $\sphericalangle EAI$, demonstrează asemănarea dorită.



Problem of the week no. 129
Let O and I be the circumcenter and the incenter of an acute triangle ABC. Rays $(AO$ and $(AI$ intersect the circumcircle at E and F, respectively. If T is the touch point of the incircle with the side BC, prove that angles $\sphericalangle AEI$ and $\sphericalangle IFT$ are equal.

Solution:
If $AB = AC$, there is nothing to prove.
We prove that triangles AEI and IFT are similar, from which the conclusion

follows.
Let D be the foot of the altitude from A. It is known that $(AO$ and $(AD$ are isogonal, i.e. $\sphericalangle IAO = \sphericalangle IAD$. As IT is parallel to AD, we have $\sphericalangle FIT = \sphericalangle FAD = \sphericalangle EAI$.
Also, it is known (it is easy to prove) that $FI = FC = 2R\sin\frac{A}{2}$, where R is the circumradius of triangle ABC. If S is the touch point of the incircle with the side AB, then $IT = IS$, hence

$$\frac{IT}{AI} = \frac{IS}{AI} = \sin\frac{A}{2} = \frac{FI}{2R} = \frac{FI}{EA}.$$

This, together with the equality of angles $\sphericalangle FIT$ and $\sphericalangle EAI$, proves the desired similarity.