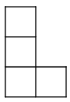
Problema săptămânii 128

a) Dintr-o tablă pătrată $(2n+1)\times(2n+1)$ se îndepărtează pătrăţelul din centru. Pentru ce valori ale lui n se poate pava suprafaţa rămasă cu dale L precum cele din figura de mai jos?

b) Dintr-o tablă pătrată $(2n+1)\times(2n+1)$ se îndepărtează unul din pătrăţelele situate în colţ. Pentru ce valori ale lui n se poate pava suprafaţa rămasă cu dale L precum cele din figura de mai jos?

(Dalele pot fi rotite şi întoarse pe faţa cealaltă.)



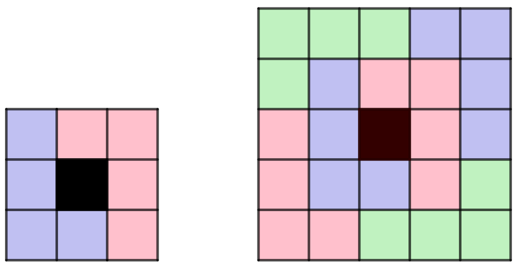
dală L

Olimpiadă Estonia, 2003

Soluţie:

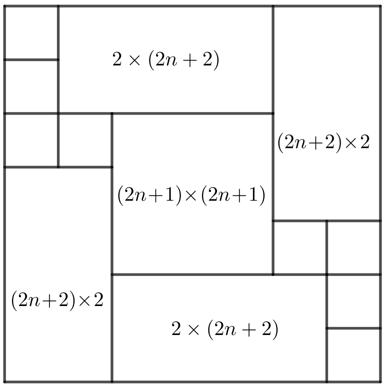
a) Vom demonstra prin inducţie de pas 2 după n că suprafaţa rămasă poate fi pavată cu dale L oricare ar fi n.

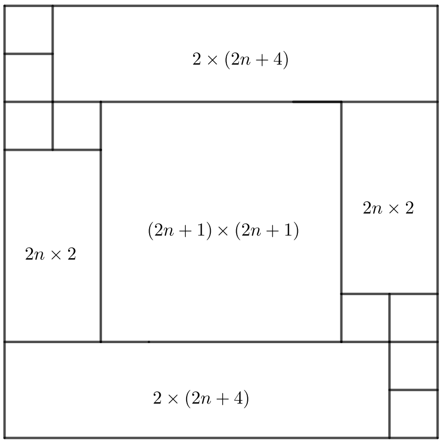
Tablele 3×3 şi 5×5 pot fi pavate ca în figura de mai jos:



Presupunând că tabla $(2n+1)\times(2n+1)$ din care s-a scos pătrăţelul central poate fi pavată cu dale L, arătăm că şi pătratul $(2n+5)\times(2n+5)$ din care s-a scos pătrăţelul din mijloc poate fi pavat. Să observăm că două dale L pot fi lipite spre a forma un dreptunghi 2×4. Folosind astfel de dreptunghiuri putem pava orice dreptunghi de forma $2i\times 4j$ $(i,j\in\mathbb{N}^*)$.

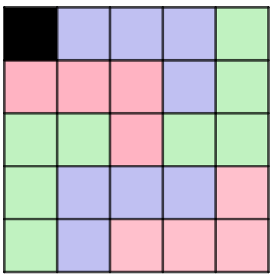
Atunci, folosind ipoteza de inducţie, putem pava pătratul $(2n+5)\times(2n+5)$ din care s-a scos pătrăţelul din mijloc în felul de mai jos (figura din stânga este pentru n impar, cea din dreapta pentru n par):



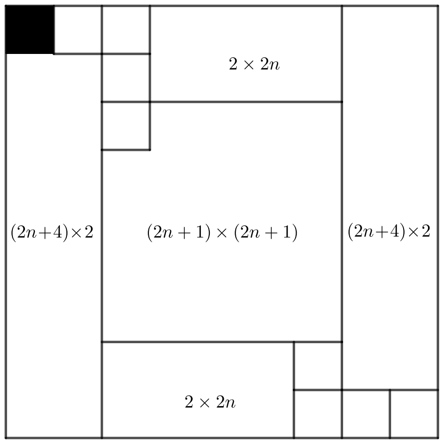


Remarcă: Se vede din cele de mai sus că putem face pavarea şi fără să întoarcem dalele pe cealaltă faţă.

b) Vom demonstra mai întâi că, dacă n este impar, atunci pavarea nu se poate face. Colorăm tabla pe benzi, alternativ cu alb şi negru. Dacă începem cu alb, vom avea n benzi complet albe, n benzi complet negre şi una cu $2n$ pătrăţele albe. Vom avea aşadar $n(2n+1)+2n = n(2n+3)$ pătrăţele albe şi $n(2n+1)$ negre. Fiecare dală acoperă fie trei pătrăţele albe şi una neagră, fie 3 negre şi una albă. Dacă notăm cu a numărul dalelor care acoperă 3 pătrăţele albe şi una neagră şi cu b numărul dalelor care acoperă 3 pătrăţele negre şi una albă, avem trebuie să avem $3a+b = n(2n+3)$ şi $3b+a = n(2n+1)$, deci $a-b = n$. Pe de altă parte, dalele trebuie să acopere $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2+4n$ pătrăţele; fiecare dală acoperă 4, deci este nevoie de n^2+n dale. Aşadar, $a+b = n^2+n$ este număr par, deci a şi b au aceeaşi paritate. Rezultă că $n = a-b$ trebuie să fie par, adică pavarea nu se poate face dacă n este impar.
În continuare vom demonstra, tot prin inducţie de pas 2, că pavarea se poate face pentru orice n par.
Pentru $n = 2$ avem următoarea pavare a pătratului 5×5 privat de colţul din stânga -sus:



În figura de mai jos se poate vedea cum se construieşte o pavare a pătratului $(2n+5)\times(2n+5)$ din care lipseşte colţul din stânga-sus pornind de la o pavare a pătratului $(2n+1)\times(2n+1)$ din care lipseşte colţul din stânga-sus.

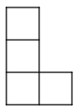


Problem of the week no. 128

a) From a $(2n+1)\times(2n+1)$ board, the square in the middle is removed. For which values of n is it possible to tile the remaining surface with L-shapes like the ones in the figure below?

b) From a $(2n+1)\times(2n+1)$ board, a square in one of the corners is removed. For which values of n is it possible to tile the remaining surface with L-shapes like the ones in the figure below?

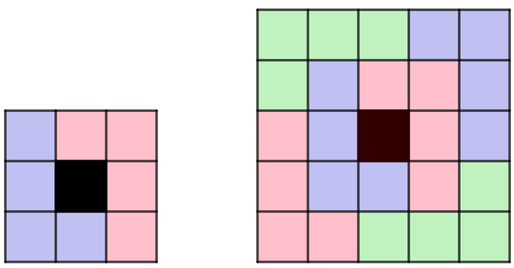
(L-shapes can be rotated and turned upsides down.)



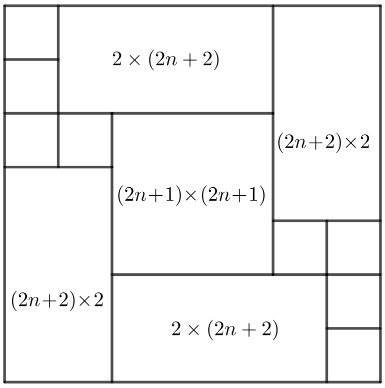
Estonian Olympiad, 2003

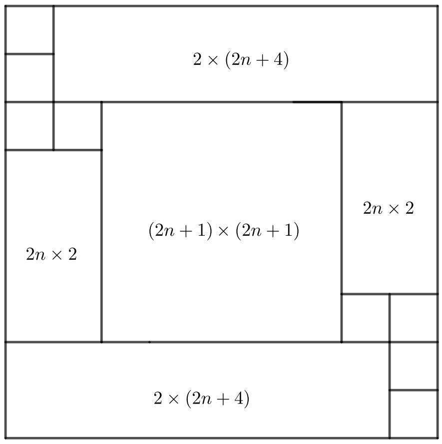
a) We prove by a step 2 induction after n that the remaining surface can be tiled with L-shapes for all n.

The 3×3 and 5×5 boards can be tiled as follows:

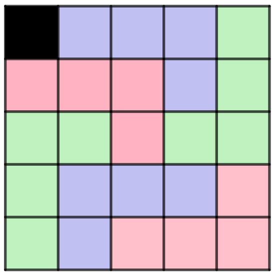


Assuming that the $(2n+1)\times(2n+1)$ board from which the central square has been removed can be tiled with L-shapes, we prove that so can the $(2n+5)\times(2n+5)$ board from which the central square has been removed. Notice that two L-shapes can be glued together to form a 2×4 rectangle. With such rectangles one can tile any $2i \times 4j$ rectangle $(i, j \in \mathbb{N}^*)$.
Then, using the inductive hypothesis, the $(2n+5)\times(2n+5)$ board deprived of its central square can be tiled as below (the figura on the left works when n is odd, while the one on the right works when n is even):

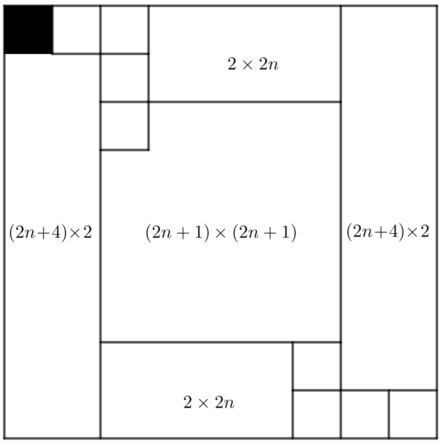




b) First, we prove that whenever n is odd, the tiling cannot be done. We color the board with black and white stripes of width 1. Starting with white, we obtain n completely white stripes, n completely black ones and another that has $2n$ white squares. We thus have $n(2n+1)+2n = n(2n+3)$ white and $n(2n+1)$ black squares. Each L-shape either covers 3 white and one black squares, or vice versa. If we denote by a the number of L-shapes that cover 3 whites and one black and with b the number of L-shapes that cover 3 blacks and one white, we need to have $3a+b = n(2n+3)$ and $3b+a = n(2n+1)$, hence $a-b=n$. On the other hand, the L-shapes must cover $(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n$ squares; each of them covers 4, so we need n^2+n L-shapes. Thus, $a+b = n^2+n$ which is even, hance a and b have the same parity. It followsthat $n = a-b$ must be even, which means that a tiling is not possible if n is odd.
Next, we prove, by induction of step 2 after n, that such a tiling is possible for all even n.
For $n=2$ we can do like this:



The figure below shows how one can tile the $(2n+5)\times(2n+5)$ board deprived of its upper-left corner with L-shapes using the tiling for the $(2n+1)\times(2n+1)$ board (deprived of its upper-left corner) which exists according to the inductive hypothesis.



The problem is taken from here, pages 9-12.