Problema săptămânii 127
Pentru orice număr natural nenul n notăm cu $f(n)$ numărul divizorilor lui n care au ultima cifră 1 sau 9 şi cu $g(n)$ numărul divizorilor lui n care au ultima cifră 3 sau 7. Demonstraţi că $f(n) \geq g(n)$ pentru orice număr natural nenul n.

Olimpiadă Elveţia, 2011

Soluţie:
Pentru un număr natural nenul n notăm cu $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ numărul divizorilor săi care au ultima cifră 1, 9, 3, respectiv 4. Atunci $f(n) = a(n) + b(n)$, iar $g(n) = c(n) + d(n)$.
Vom demonstra afirmaţia din enunţ prin inducţie (tare) după $n \geq 1$.
Pentru $n = 1$ avem $a(1) = 1$, $b(1) = c(1) = d(1) = 0$, deci $f(1) = 1 > 0 = g(1)$.
Fie n un număr natural oarecare mai mare ca 1. Presupunem adevărată afirmaţia pentru orice număr natural nenul mai mic ca n şi o demonstrăm pentru n.
Dacă $d = (n, 10) \neq 1$, atunci notând $m = \frac{n}{d}$, avem că $m < n$ şi deci $f(n) = f(m) \geq g(m) = f(m)$. Presupunem în continuare că $(n, 10) = 1$.
Dacă n este prim, atunci el are doi divizori, dintre care unul are ultima cifră 1, deci $f(n) \geq 1 \geq g(n)$.
Dacă n este putere de număr prim, $n = p^k$ cu p prim, ultima cifră a lui p^j se repetă periodic, deci:
- dacă ultima cifră a lui p este 1, atunci $f(n) = k + 1 > 0 = g(n)$;
- dacă ultima cifră a lui p este 3, atunci $a(n) = \left\lfloor \dfrac{k}{4} \right\rfloor + 1$, $b(n) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{4} \right\rfloor$, $c(n) = \left\lfloor \dfrac{k+1}{4} \right\rfloor$, $d(n) = \left\lfloor \dfrac{k+3}{4} \right\rfloor$ şi se vede uşor, eventual analizând modulo 4, că $f(n) \geq g(n)$;
- dacă ultima cifră a lui p este 7, atunci $a(n) = \left\lfloor \dfrac{k}{4} \right\rfloor + 1$, $b(n) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{4} \right\rfloor$, $c(n) = \left\lfloor \dfrac{k+3}{4} \right\rfloor$, $d(n) = \left\lfloor \dfrac{k+1}{4} \right\rfloor$, deci $f(n) \geq g(n)$;
- dacă ultima cifră a lui p este 9, atunci $f(n) = k + 1 > 0 = g(n)$.
Dacă n are doi factori primi diferiţi, atunci n se scrie $n = xy$, cu $(x, y) = 1$ şi $(x, 10) = (y, 10) = 1$.
Atunci
$$\begin{aligned}
a(xy) &= a(x)a(y) + b(x)b(y) + c(x)d(y) + d(x)c(y),\\
b(xy) &= a(x)b(y) + b(x)a(y) + c(x)c(y) + d(x)d(y),\\
c(xy) &= a(x)c(y) + b(x)d(y) + c(x)a(y) + d(x)b(y),\\
d(xy) &= a(x)d(y) + b(x)c(y) + c(x)a(y) + d(x)a(y).
\end{aligned}$$
De aici rezultă că $f(xy) - g(xy) = [f(x)f(y) + g(x)g(y)] - [f(x)g(y) + f(y)g(x)] = [f(x) - g(x)] \cdot [f(y) - g(y)] \geq 0$ conform ipotezei de inducţie aplicate numerelor $x, y < n$.
Aşadar afirmaţia din enunţ este probată prin inducţie.

Soluţia 2: (*Dan Schwarz*), muuult mai scurtă
Astfel de divizori, care se termină în $1, 3, 7, 9$, nu pot conţine factorii primi 2 şi/sau 5. Factorii primi care se termină în 1 sau 9 sunt nerelevanţi deoarece orice produs al lor se va termina în 1 sau 9.
Pentru factorii primi 3 sau 7, contează de câte ori apar în descompunerea în factori primi a divizorului; dacă apar de un număr par de ori, divizorul se va termina în 1 sau 9, iar dacă avem un număr impar de asemenea factori, divizorul se va termina în 3 sau 7. Dar întotdeauna există cel puţin la fel de multe posibilităţi de primul fel decât de al doilea fel - totul depinde de paritatea numărului de factori primi care au ultima cifră 3 şi 7; dacă avem un număr par din fiecare, atunci $f(n) > g(n)$, iar dacă măcar unul din aceşti factori primi apare la o putere impară atunci $f(n) = g(n)$.

Comentariu:
Ideea e că dacă scriem un număr oarecare n sub forma $n = x \cdot y$ unde x este produsul divizorilor primi care au ultima cifră 1 sau 9, iar y este produsul divizorilor primi care au ultima cifră 3 sau 7 (sau, în lipsa acestora, este 1), atunci $f(n) = f(x) \cdot f(y)$, iar $g(n) = f(x) \cdot g(y)$. Aşadar, este suficient să demonstrăm afirmaţia pentru numere care nu au factori primi cu ultima cifră 1 sau 9. Apoi, dacă $(u, v) = 1$, atunci $f(uv) = f(u)f(v) + g(u)g(v)$, iar $g(uv) = f(u)g(v) + f(v)g(u)$ (dacă se renunţă la condiţia $(u, v) = 1$, unii divizori vor fi număraţi de mai multe ori). Dacă p este un factor prim al lui n care se termină cu 3 sau 7 şi care apare la puterea m în descompunerea în factori a lui n, adică $n = p^m \cdot N$, cu $(p, N) = 1$, atunci distingem două cazuri:
- dacă m este impar, $m = 2k + 1$, atunci $f(p^m) = g(p^m) = k + 1$, deci $f(n) = f(p^m)f(N)+g(p^m)g(N) = (k+1)\big(f(N)+g(N)\big) = f(p^m)g(N)+f(N)g(p^m) = g(n)$.
- dacă m este par, $m = 2k$, atunci $f(p^m) = m + 1$, $g(p^m) = m$, deci inegalitatea $f(n) > g(n)$ se scrie $f(p^m)f(N) + g(p^m)g(N) > (k + 1)\big(f(N) + g(N)\big) = f(p^m)g(N) + f(N)g(p^m)$, adică $(k + 1)f(N) + k \cdot g(N) > (k + 1)g(N) + k \cdot f(N)$, sau $f(N) > g(N)$.

Problem of the week no. 127
For any positive integer n let $f(n)$ be the number of divisors of n ending with 1 or 9 in base 10 and let $g(n)$ be the number of divisors of n ending with digit 3 or 7 in base 10. Prove that $f(n) \geqslant g(n)$ for all positive integers n.

Swiss Mathematical Olympiad, 2011

Some **solutions** can be found on
https://artofproblemsolving.com/community/c6h398081p2214821.

One of them is:

Hint (*Dan Schwarz*, AoPS)
Such divisors, ending with $1, 3, 7, 9$ cannot contain the primes 2 and/or 5. Those

primes ending with 1 or 9 are irrelevant, since any product of them will end in 1 or 9.
For those primes ending with 3 or 7, it matters how many appear in the divisor; if an even number of them, then the divisor will end with 1 or 9, and if an odd number of them, then the divisor will end with 3 or 7. But always there are at least as many possibilities of the first kind than of the second - it depends on the exponents of the primes ending with 3 or 7; if all are even, there will be more of the first kind, and if at least one is odd, there will the same number of the first and second kinds.