Problema săptămânii 125
Fie T punctul de contact al cercului A-exînscris cu la latura $[BC]$ şi P un punct oarecare pe semidreapta opusă semidreptei $(TA$. Tangentele din P la cercul înscris în triunghiul ABC intersectează BC în D şi E. Arătaţi că $BD = CE$.

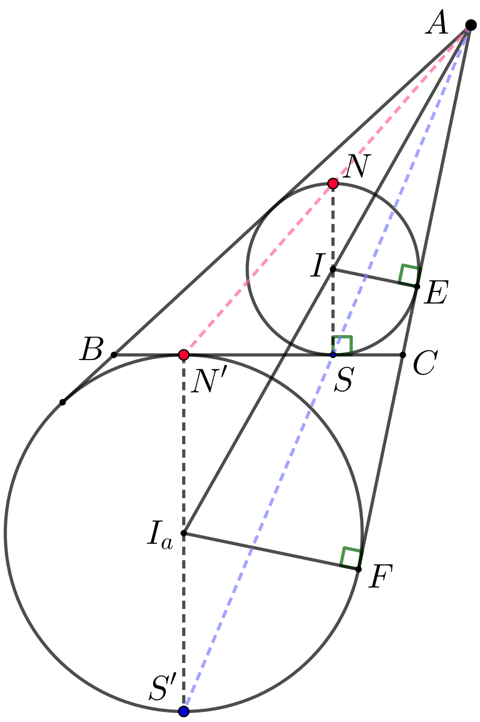
Problema e echivalentă cu problema 14 de la Concursul Baltic Way 2018, vezi aici. Afirmaţia din enunţ rămâne adevărată oriunde ar fi punctul $P \in AT$, în exteriorul cercului înscris.

Soluţie:
Vom folosi următoarea

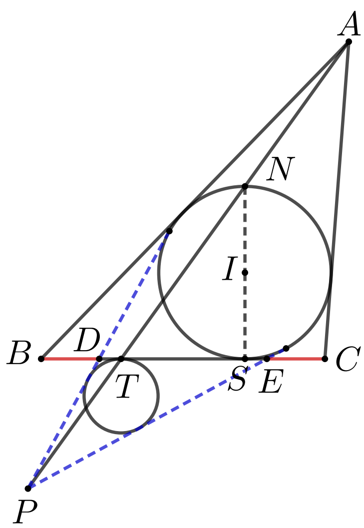
Lemă: Fie ABC un triunghi, S şi N' punctele de contact ale cercului înscris, respectiv exînscris, cu latura $[BC]$, iar N şi S' punctele diametral opuse lui S şi N' în cercul înscris, respectiv exînscris. Atunci:
a) $BS = CN'$,
b) punctele A, N şi N' sunt coliniare,
c) punctele A, S şi S' sunt coliniare.

(Am notat punctele cu N/N' şi S/S' pentru că într-o reprezentare obişnuită, cu latura $[BC]$ desenată orizontal, punctele N/N' sunt cele mai „nordice" ale cercurilor pecare se află, în vreme ce S/S' sunt punctele cele mai „sudice". Astfel, omotetia de centru A care duce cercul înscris în cel exînscris duce polul nord N al cercului înscris în polul nord, N', al cercului exînscris şi face la fel cu polul sud.)

Demonstraţia lemei:
a) Cu notaţiile obişnuite, se arată uşor că $BS = CN' = p - b$.
b),c) Dacă $AB = AC$ atunci nu avem ce demonstra, punctele A, N, I, S, N', I_a, S' fiind, toate, coliniare.
În continuare presupunem $AB \neq AC$. Fie I şi I_a centrele cercurilor înscris, respectiv exînscris, iar r şi r_a razele acestora. Dacă $IE \perp AB$, $I_aF \perp AB$, $E, F \in AB$, atunci $\dfrac{AI}{AI_a} = \dfrac{IE}{I_aF} = \dfrac{r}{r_a}$. Apoi, avem $\dfrac{IN}{I_aN'} = \dfrac{r}{r_a} = \dfrac{AI}{AI_a}$ şi $\sphericalangle AIN \equiv \sphericalangle AI_aN'$ (deoarece $IN \parallel I_aN'$), deci $\Delta AIN \sim \Delta AI_aN'$. Rezultă că $\sphericalangle IAN \equiv \sphericalangle I_aAN'$, ceea ce arată că punctele A, N, N' sunt coliniare. Analog se arată că punctele A, S, S' sunt coliniare.



Rezolvarea problemei:
Dacă notăm cu $N \in AT$ „polul nord” al cercului înscris şi cu $S \in BC$ „polul sud”, Să observăm că pentru triunghiul PDE acest cerc este cercul exînscris. Atunci, cum N este polul sud al cercului exînscris triunghiului PDE (poate că ar fi bine să întoarcem hârtia cu susul în jos!), PN trece prin „polul sud” al cercului înscris, prin urmare T este punctul de contact al cercului înscris în triunghiul HDE cu latura $[DE]$. Dar atunci, conform lemei, $DS = ET$. Tot conform lemei avem şi $BS = CT$, de unde, $BD = CE$.



Remarci:
1. (*David-Andrei Anghel*) Are loc şi o reciprocă a afirmaţiei din enunţ: dacă $D, E \in [BC]$ sunt două puncte simetrice faţă de mijlocul lui $[BC]$, atunci tangentele (diferite de BC) duse din aceste puncte la cercul înscris se intersectează pe dreapta AT. Această proprietate poate fi folosită spre a demonstra (cu „redefinirea punctului") afirmaţia directă.
2. (*Petru Braica*) Configuraţia seamănă şi cu cea din problema 27539 din GM nr. 10/2018. Ea este tratată pe larg în prima din cele trei leme din materialul lui Yufei Zhao, Three Lemmas in Geometry, disponibil şi la secţiunea „Materiale teoretice de geometrie".

Problem of the week no. 125
Let T be the touch point of the excircle tangent to the side BC of triangle ABC and let P be an arbitrary point on the line AT such that $T \in (AP)$. The tangent lines from P to the incircle of triangle ABC intersect the side BC at D and E. Prove that $BD = CE$.
Solution:
The problem is equivalent to problem 14 from the Baltic Way Competition 2018, see here.
Th statement of the problem remains true for all $P \in AT$, P outside the incircle.

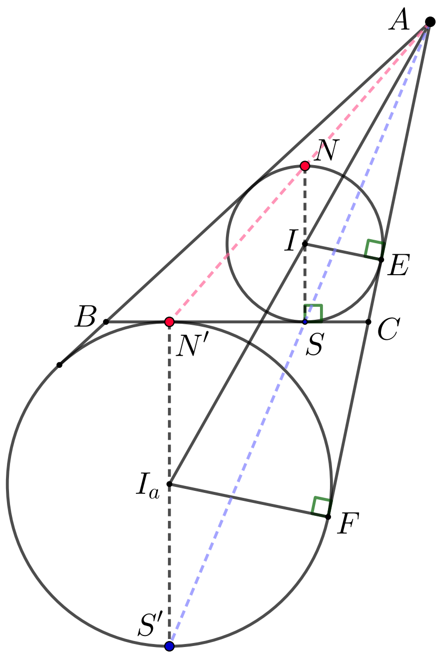
We shall use the following

Lemma: Let ABC be a triangle, in which S and N' are the touch-points of the incircle and excircle with the side $[BC]$, while N and S' are the points diametrically opposed to S and N' in the incircle and the excircle respectively. Then:
a) $BS = CN'$,
b) points A, N and N' are collinear,
c) points A, S and S' are collinear.

(We have denoted the points by N/N' and S/S' because, in the usual way we represent triangles, the side BC comes horizontally, and thus points N/N' are the furthest to the "north" on their circles, while points S/S' are furthest to the "south". The homothety centered at A that maps the incircle onto the excircle takes the 'North Pole' N of the incircle into the "North Pole" of the excircle, N', and does similarly with the South Pole.)

Proof of the Lemma:
a) With the usual notations, it is easy to prove that $BS = CN' = s - b$.
b),c) If $AB = AC$, there is nothing to prove since A, N, I, S, N', I_a, S' are all collinear.
Next, we assume $AB \neq AC$. Let I and I_a be the incenter and the excenter, while r and r_a are the radii of the incircle and excircle. If $IE \perp AB$, $I_aF \perp AB$, $E, F \in AB$, then $\dfrac{AI}{AI_a} = \dfrac{IE}{I_aF} = \dfrac{r}{r_a}$. Thus, $\dfrac{IN}{I_aN'} = \dfrac{r}{r_a} = \dfrac{AI}{AI_a}$ and $\sphericalangle AIN = \sphericalangle AI_aN'$ (because $IN \parallel I_aN'$), hence triangles ΔAIN and $\Delta AI_aN'$ are similar. It follows

that $\sphericalangle IAN = \sphericalangle I_aAN'$, which shows that points A, N, N' are collinear. Similarly, it follows that A, S, S' are also collinear.



back to the problem:
If we denote by $N \in AT$ "the North Pole" of the incircle and by $S \in BC$ "its South Pole", let us notice that this circle is also the excircle of triangle HDE. Then, according to the Lemma, as N is the South Pole (!) of the excircle of triangle HDE (it might be useful tu turn your figure upside down!) the line HN passes through the South Pole of the incircle, hence T is the touch-point of the incircle of triangle HDE with the side $[DE]$. But then, according to the Lemma, we have $DS = ET$, and, also, $BS = CT$, hence $BD = CE$.