Problema 1. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) care verifică relaţia

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

Soluţie:
Scriem ecuaţia sub forma $(x^3 + 1)(x^2 + x + 1) = y^2$ şi observăm că numerele $x^3 + 1$ şi x^2+x+1 sunt relativ prime. Într-adevăr, dacă d divide şi x^3+1 şi x^2+x+1, atunci d divide şi $(x^3 + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = 2$, deci $d = 1$ sau $d = 2$. Însă, cum $x^2 + x + 1$ este număr impar (deoarece x şi x^2 au aceeaşi paritate), 2 nu divide $x^2 + x + 1$, deci $d = 1$. Produsul a două numere prime între ele este pătrat perfect numai atunci când fiecare din ele este pătrat perfect, deci, în particular, $x^2 + x + 1$ trebuie să fie pătrat perfect. Acest lucru se întâmplă dacă $x = -1$ sau $x = 0$. În rest, dacă $x < -1$, atunci $(x - 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$, iar dacă $x > 0$ atunci $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$, deci, fiind cuprins între două pătrate perfecte consecutive, numărul x^2+x+1 nu este pătrat perfect.
(Alternativ, se poate observa că dacă $x < -1$ atunci $x^3 - 1 < 0$, deci nu poate fi pătrat perfect.)
Pentru $x = -1$ se obţine $y = 0$, iar pentru $x = 0$ rezultă $y = -1$ sau $y = 1$.
În concluzie, perechile căutate sunt $(-1, 0)$, $(0, -1)$ şi $(0, 1)$.

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numerele reale (a, b) pentru care $a+b = 1$ şi $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$.

Olimpiadă Estonia

Soluţia 1:
Folosind relaţia $a + b = 1$, rescriem condiţia $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$ sub forma

$$(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = (a^4 + b^4)(a + b).$$

Efectuând calculele, se ajunge la $a^3b^2+a^2b^3 = a^4b+ab^4$, adică la $ab(a^3-a^2b-ab^2+b^3) = 0$ care se descompune în factori $ab(a^2 - b^2)(a - b) = 0$. Deducem că fie $a = 0$ (şi atunci se obţine $b = 1$), fie $b = 0$ (şi atunci $a = 1$), fie $a = b$ (şi atunci se obţine $a = b = \frac{1}{2}$).
Cazul $a^2 - b^2 = 0$, adică $0 = (a - b)(a + b) = a - b$, revine tot la $a = b$.
Am obţinut perechile $(0, 1)$, $(1, 0)$ şi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Toate aceste perechi satisfac relaţiile din enunţ.

Soluţia 2:
Pornim de la $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Folosind $a + b = 1$ şi înlocuind în relaţia $(a^2+b^2)(a^3+b^3) = a^4+b^4$, obţinem $(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+b^4$. Efectuăm calculele şi ajungem la $ab(a^2 + b^2 - 2ab) = 0$, adică la $ab(a - b)^2$. De aici se finalizează ca în prima soluţie.

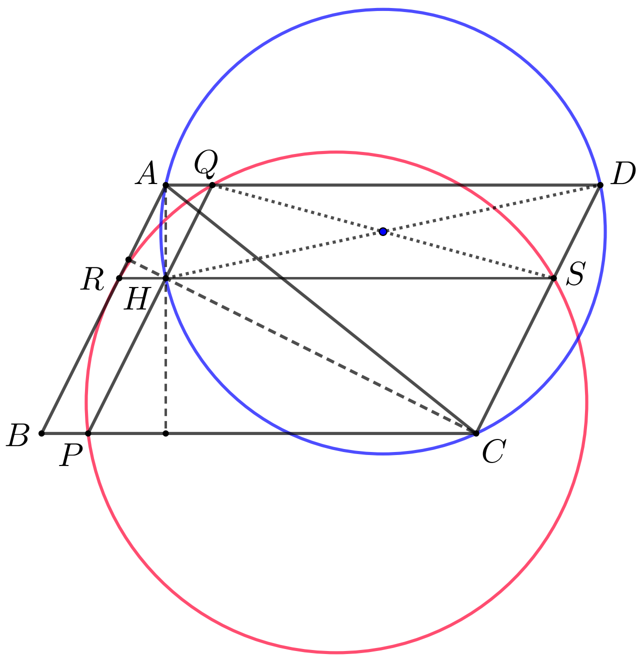
Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi H ortocentrul triunghiului ABC. Paralela prin H la CD intersectează BC şi AD în P, respectiv Q, iar paralela prin H la AD intersectează AB şi CD în R, respectiv S. Demonstraţi că punctele P, Q, R şi S sunt conciclice.

Oimpiadă Elveţia, 2011

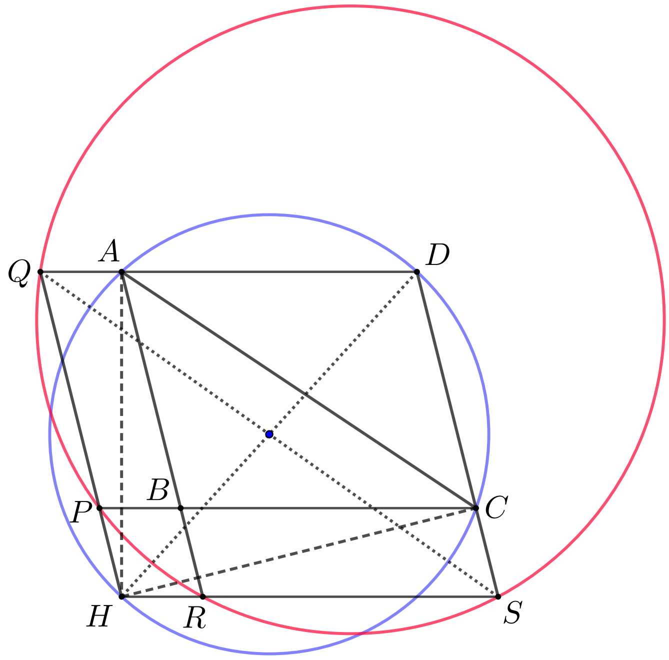
Soluţie:
Vom distinge trei situaţii în funcţie de măsura unghiului $\sphericalangle ABC$.

• Dacă $m(\sphericalangle ABC) = 90°$, atunci $P = B$, $Q = A$, $R = B$ şi $Q = C$, ori A, B, C sunt conciclice.

• Dacă $m(\sphericalangle ABC) < 90°$, atunci $H \in int(\Delta\, ABC)$, $P \in (BC)$, $Q \in (AD)$, $R \in (AB)$, $S \in (CD)$, iar $H \in [PQ] \cap [RS]$. În acest caz, conform teoremei puterii punctului şi a reciprocei sale, $PSQR$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$. Cum $HPCS$, $HSDQ$, $HRBP$ şi $HQAR$ sunt paralelograme, relaţia precedentă este echivalentă cu $SC \cdot SD = QA \cdot QD$. Dar patrulaterul $AHCD$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[HD]$), iar relaţia precedentă arată că punctele S şi Q au aceeaşi putere faţă de cercul circumscris patrulaterului $AHCD$. Această condiţie este echivalentă cu S şi Q egal depărtate de centrul cercului. Centrul cercului este mijlocul lui $[HD]$ şi, deoarece $QHSD$ este paralelogram, punctele Q şi S sunt egal depărtate de acest punct.



• Dacă $m(\sphericalangle ABC) > 90°$, atunci $B \in int(\Delta\, AHC)$, $B \in (PC)$, $A \in (QD)$, $B \in (AR)$, $C \in (SD)$, iar $H \notin [PQ]$ şi $H \notin [RS]$. În acest caz, conform teoremei puterii punctului şi a reciprocei sale, $QPRS$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$. Cum $HPCS$, $HSDQ$, $HRBP$ şi $HQAR$ sunt paralelograme, relaţia precedentă este echivalentă cu $SC \cdot SD = QA \cdot QD$. Dar patrulaterul $AHCD$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[HD]$), iar relaţia precedentă arată că punctele S şi Q au aceeaşi putere faţă de cercul circumscris patrulaterului $AHCD$. Această condiţie este echivalentă cu S şi Q egal depărtate de centrul cercului. Centrul cercului este mijlocul lui $[HD]$ şi, deoarece $QHSD$ este paralelogram, punctele Q şi S sunt egal depărtate de acest punct.



Remarcă: O ipoteză esenţială a reciprocei teoremei puterii punctului este ca, pe lângă $\{P\} = AB \cap CD$ şi $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, să avem că punctul P se găseşte fie pe ambele segmente $[AB]$ şi $[CD]$, fie pe niciunul din ele. Această ipoteză trebuie verificată de câte ori se aplică teorema reciprocă a puterii punctului.

O **altă idee** de rezolvare:
Se arată uşor că triunghiurile ARH şi CPH sunt asemenea. Folosind că $AR = HQ$ şi $HS = CP$, avem $\frac{HQ}{HR} = \frac{AR}{HR} = \frac{CP}{HP} = \frac{HS}{HP}$. Rezultă $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$ şi, analizând cazurile ca mai sus, se vede că $H \in [PQ] \cap [RS]$ (dacă $\sphericalangle ABC$ este ascuţit sau drept) sau $H \notin [PQ] \cap [RS]$ (dacă $\sphericalangle ABC$ este obtuz). Din reciproca teoremei puterii punctului rezultă atunci concluzia.

Problema 4. Se consideră un tetraedru. Stabiliţi dacă se pot scrie 10 numere naturale consecutive în cele 4 vârfuri şi în mijloacele celor 6 muchii ale tetraedrului astfel încât numărul scris în mijlocul fiecărei muchii să fie media aritmetică a numerelor scrise în vârfurile din capetele muchiei.

Caucasus Mathematical Olympiad, 2018

Soluţia 1:
În toate vârfurile trebuie scrise numere de aceeaşi paritate, altfel numărul de pe o

muchie care uneşte două vârfuri cu etichete de parităţi diferite nu va fi etichetată cu un număr natural.
Aşadar, numerele scrise în cele patru vârfuri pot da numai două resturi diferite la împărţirea cu 4 (0 şi 2 sau 1 şi 3). Dispunem de 5 numere de fiecare paritate, 3 dintre ele dau un rest la împărţirea cu 4, celelalte două dau un alt rest. Astfel, din cele 4 numere din vârfuri, putem avea fie câte două care dau un acelaşi rest, fie trei numere care dau un anumit rest şi un alt număr care dă un alt rest (cu 2 mai mare sau cu 2 mai mic). Pe o muchie care are în capete etichete care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4 se va scrie atunci un număr de aceeaşi paritate cu ele. Dar avem cel puţin două asemenea muchii, deci vom avea nevoie de cel puţin 6 etichete de aceeaşi paritate (4 pentru vârfuri şi încă cel puţin două pentru muchii). Ori dispunem de numai 5 numere de fiecare paritate, deci o etichetare precum cea cerută în enunţ nu este posibilă.

Soluţia 2:
Să presupunem că o asemenea etichetare este posibilă. Fie n numărul cel mai mare. Evident, n trebuie să stea într-un vârf (el nu poate fi media aritmetica a două numere mai mici). Numărul $n-1$ nu poate sta într-un alt vârf deoarece pe muchia care uneşte vârfurile etichetate cu n şi $n-1$ nu am scrie un număr natural. În plus, $n-1$ trebuie să stea pe muchia care uneşte vârfuri etichetate cu n şi $n-2$. Ne uităm acum la $n-3$. El nu poate sta într-un vârf (muchia care uneşte acest vârf cu vârful etichetat cu n nu ar avea eticheta naturală). Dacă stă pe o muchie care pleacă din $n-2$, atunci în celălalt capăt al muchiei am avea $n-4$, iar pe muchia care uneşte $n-4$ cu n ar trebui să refolosim eticheta $n-2$, contradicţie. Rezultă că $n-3$ trebuie să fie scris pe o muchie care pleacă din vârful etichetat cu n (altfel $n-3$ ar fi media aritmetică a două numere mai mici). Celălalt capăt al muchiei ar fi etichet cu $n-6$. Pe muchia care uneşte $n-6$ cu $n-2$ ar sta $n-4$. Atunci în ultimul vârf trebuie să punem $n-8$, dar atunci pe muchia care uneşte acest vârf cu cel etichetat cu n ar trebui să refolosim eticheta $n-4$. Am ajuns astfel la o contradicţie, deci o etichetare precum cea din enunţ nu este posibilă.

Soluţia 3:
Să presupunem că o asemenea etichetare este posibilă. În toate vârfurile trebuie scrise numere de aceeaşi paritate, altfel numărul de pe o muchie care uneşte două vârfuri cu etichete de parităţi diferite nu va fi etichetată cu un număr natural.
Evident, numărul cel mai mare trebuie să stea într-un vârf (el nu poate fi media aritmetica a două numere mai mici).
Analog, numărul cel mai mic trebuie să stea într-un vârf.
Dar numărul cel mai mare şi numărul cel mai mic nu au aceeaşi paritate, deci o asemenea etichetare nu este posibilă.

Remarcă: Dacă o asemenea etichetare ar fi posibilă cu etichetele $n+1$, $n+2$, ... , $n+10$, ea ar fi posibilă şi cu etichetele 1, 2, ... , 10: scăzând n din fiecare etichetă, numerele obţinute vor continua să satisfacă toate condiţiile din enunţ.