Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n se defineşte „*n factorial*” ca fiind numărul

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

(Aşadar $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ş.a.m.d.)
Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c, d, e, f pentru care

$$a! + b! + c! + d! + e! = f!.$$

Problema 2. **a)** Demonstraţi că, pentru orice numere naturale nenule k şi n, are loc egalitatea

$$\frac{k}{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)} =$$
$$= \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}.$$

b) Dacă $A = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}$ şi

$$B = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100},$$

comparaţi numerele $3A$ şi $16B$.

Problema 3. În patrulaterul convex $ABCD$, $m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle ADC)$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ trece prin mijlocul laturii $[AD]$. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle ACD$.

Problema 4. Andreea joacă următorul joc. Mai întâi, ea scrie pe tablă un număr natural nenul. Apoi, la fiecare pas, dacă pe tablă este scris numărul n, ea îl şterge de pe tablă şi scrie în locul acestuia numărul $\frac{n}{2}$, dacă n a fost par, respectiv numărul $n+7$, dacă n a fost impar. Să notăm cu A, B, respectiv C mulţimea acelor numere naturale nenule pornind de la care Andreea poate obţine pe tablă numerele 1, 3, respectiv 7. (Andreea continuă jocul şi după ce a obţinut unul din aceste numere.)
a) Arătaţi că orice număr natural nenul îi aparţine exact uneia din mulţimile A, B şi C.
b) Câte elemente mai mici ca 1.000.000 are fiecare dintre mulţimile A, B şi C?