Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere naturale pentru care $3^a + 3^b + 3^c$ este pătrat perfect.

Şahin Emrah, Olimpiadă juniori Turcia, 2017

Soluţie:
Fie a, b, c, n numere naturale astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = n^2$. Deoarece $3^a + 3^b + 3^c$ este număr impar, n trebuie să fie impar. Dacă $n = 2k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$, atunci $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ este congruent cu 1 modulo 8 (numărul $k(k + 1)$ - fiind produs de două numere consecutive - este par). Aşadar trebuie ca $3^a+3^b+3^c \equiv 1 \pmod 8$. Dacă $m = 2j$ este număr par, atunci $3^m = 9^j = (8 + 1)^j \equiv 1 \pmod 8$, iar dacă $m = 2j + 1$ este impar, atunci $3^m = 3 \cdot 9^j = 3(8 + 1)^j \equiv 3 \pmod 8$. Aşadar, fiecare dintre numerele 3^a, 3^b, 3^c este congruent cu 1 sau 3 modulo 8, iar singura posibilitate ca suma lor să fie congruentă cu 1 (mod 8) este ca $3^a \equiv 3^b \equiv 3^c \equiv 3 \pmod 8$, adică a, b, c să fie toate impare.
Datorită simetriei putem presupune $a \leq b \leq c$. Atunci $3^a + 3^b + 3^c = 3^a(1 + 3^{b-a} + 3^{c-a})$. Pentru ca acest număr să fie pătrat perfect, trebuie ca exponentul lui 3 din descompunerea sa în factori primi să fie par. Dar cum a este impar, acest lucru este posibil numai dacă $3 \mid 1+3^{b-a}+3^{c-a}$, ceea ce se întâmplă numai dacă $b-a = c-a = 0$. Aşadar trebuie ca a, b, c să fie numere impare egale.
Această condiţie este şi suficientă: dacă $a = b = c = 2i + 1$, atunci $3^a + 3^b + 3^c = 3 \cdot 3^{2i+1} = (3^{i+1})^2$.
În concluzie, tripletele căutate sunt cele de forma $(2i + 1,\ 2i + 1,\ 2i + 1)$, cu $i \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Spunem că un număr natural nenul este *aproape pătrat* dacă el este produsul a două numere naturale consecutive (adică „*aproape* egale”).
Arătaţi că orice *aproape pătrat* poate fi scris ca raportul dintre două *aproape pătrate*.

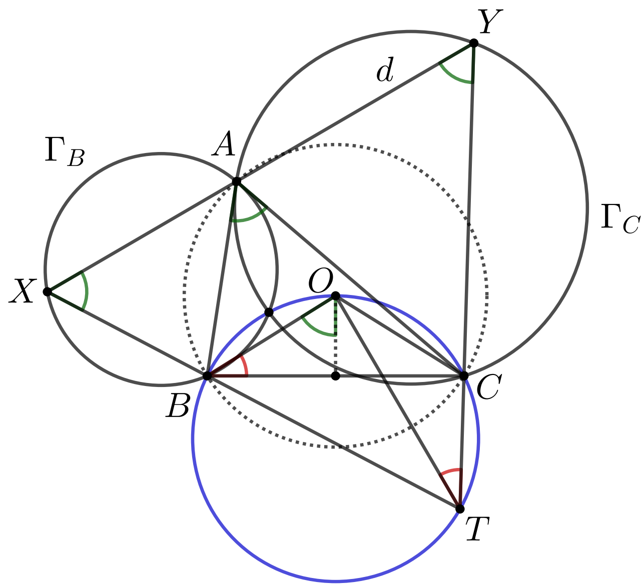
V. Senderov, Olimpiadă Rusia, 2015

Soluţie:
Observăm că produsul a două numere *aproape pătrate* consecutive, $n(n-1)$ şi $(n+1)n$, este $n(n - 1)(n + 1)n = (n^2 - 1)n^2$, adică un număr care este tot un *aproape pătrat*. Putem atunci scrie $(n-1)n = \dfrac{(n^2 - 1)n^2}{n(n + 1)}$. Cum orice număr aproape pătrat se scrie sub forma $(n - 1)n$, el se scrie ca raportul dintre două numere *aproape pătrate*.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi O centrul cercului său circumscris. Considerăm cercul Γ_B care trece prin A şi B şi este tangent laturii $[AC]$, precum şi cercul Γ_C care trece prin A şi C şi este tangent laturii $[AB]$. O dreaptă d care trece prin A intersectează a doua oară cercurile Γ_B şi Γ_C în punctele X, respectiv Y. Demonstraţi că $OX = OY$.

baraj de juniori, Franţa

Soluţie:
Deoarece AC este tangentă cercului Γ_B, avem că $\sphericalangle AXB \equiv \sphericalangle BAC$ (ambele subîntind arcul AB al cercului Γ_B). Analog, $\sphericalangle AYC \equiv \sphericalangle BAC$, deci unghiurile $\sphericalangle AXB$ şi $\sphericalangle AYC$ sunt congruente şi ascuţite. Atunci există $\{T\} = BX \cap CY$ şi triunghiul XTY este isoscel. În plus, $m(\sphericalangle XTY) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle A)$. Pe de altă parte, $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle A)$, deci patrulaterul $OBTC$ este inscriptibil (are două unghiuri opuse suplementare). Rezultă că $m(\sphericalangle OTC) = m(\sphericalangle OBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle A) = 90^\circ - m(\sphericalangle TYA)$, deci $TO \perp XY$. Aşadar punctul O se află pe înălţimea din T a triunghiului TXY, care este totodată şi mediatoarea segmentului $[XY]$, deci $OX = OY$.



Remarcă: Un simplu calcul de unghiuri arată că şi cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor Γ_B şi Γ_C se găseşte pe cercul circumscris triunghiului OBC.

Problema 4. Pe o tablă sunt scrise numerele 5, 7 şi 9. La fiecare pas, alegem două numere diferite de pe tablă, a şi b, cu $a > b$ şi scriem pe tablă şi numărul $5a-4b$. Este posibil ca după mai mulţi paşi pe tablă să fie scris numărul 3333? Dar numărul 5555?

Soluţie:
Vom arăta că răspunsul la ambele întrebări este negativ.
Să observăm mai întâi că pe tablă se vor scrie numai numere impare. Într-adevăr, dacă la efectuarea unui pas, se aleg a şi b impare, numărul $5a-4b$ care va fi scris pe tablă va fi tot impar. Cum iniţial pe tablă erau numai numere impare, se vor obţine numai numere impare.
De asemenea, numerele scrise la început pe tablă dădeau resturile 0, 2 şi 4 la împărţirea cu 5. Nici ulterior nu putem obţine altfel de numere deoarece $5a-4b = 5(a-b)+b$ dă acelaşi rest la împărţirea cu 5 ca şi b. Astfel, toate numerele ce se pot scrie pe tablă vor avea ultima cifră 5, 7 sau 9, prin urmare numărul 3333 nu poate fi scris pe tablă.
În plus, $5a-4b = 4(a-b)+a$ şi, cum $a-b$ este număr par, numărul ce urmează a fi scris pe tablă la efectuarea unui pas dă acelaşi rest la împărţirea cu 8 ca şi a. Numerele scrise la început pe tablă dădeau resturile 5, 7 şi 1 la împărţirea cu 8, iar remarca precedentă arată că la efectuarea unui pas nu apar numere care să dea alte resturi la împărţirea cu 8 în afara celor deja existente, deci toate numerele care se scriu pe tablă vor da unul din resturile 1, 5 sau 7 la împărţirea cu 8. Prin urmare numărul 5555, care dă rest 3 la împărţirea cu 8 nu va putea fi scris niciodată pe tablă.

Remarcă: Se poate demonstra că 3333 nu poate fi obţinut tot analizând modulo 8. Iată cum: să observăm mai întâi că $5a-4b = a+4(a-b) > a$, deci pe tablă nu se pot obţine numere mai mici decât 5. Numere care dau restul 5 la împărţirea cu 8 se obţin numai alegând a de acestă formă şi b un număr mai mic, dar cum nu există număr mai mic decât 5, nu putem obţine niciun număr care să dea restul 5 la împărţirea cu 8, în afară de 5. În particular, nu îl vom putea obţine pe 3333.