Problema 1. Numerele raţionale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt astfel încât $|x_k| \leq 1$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|.$$

Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

Soluţie:
Deoarece $19 \leq 19+|x_1+x_2+\ldots+x_n| = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| \leq \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ de } 1} = n$, este clar că trebuie ca $n \geq 19$.
Dacă ar exista $n = 19$ numere cu proprietatea din enunţ, ar trebui să avem egalitate în toate inegalităţile de mai sus, adică ar trebui ca $x_1 + x_2 + \ldots + x_{19} = 0$ şi $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{19}| = 1$. Ar trebui aşadar ca $x_1, x_2, \ldots, x_{19} \in \{-1, 1\}$. Dar atunci suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_{19}$ va fi un număr întreg impar, prin urmare ea nu poate fi 0. În concluzie, nu există $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ cu proprietatea din enunţ.
Aşadar, trebuie ca $n \geq 20$. Putem, de exemplu, alege $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = \dfrac{19}{20}$ şi $x_{11} = x_{12} = \ldots = x_{20} = -\dfrac{19}{20}$. Aceste 20 de numere au proprietatea din enunţ, deci cel mai mic număr n este $n = 20$.

Problema 2. Numerele raţionale a, b, c, d satisfac egalităţile

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c).$$

Demonstraţi că cel puţin trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

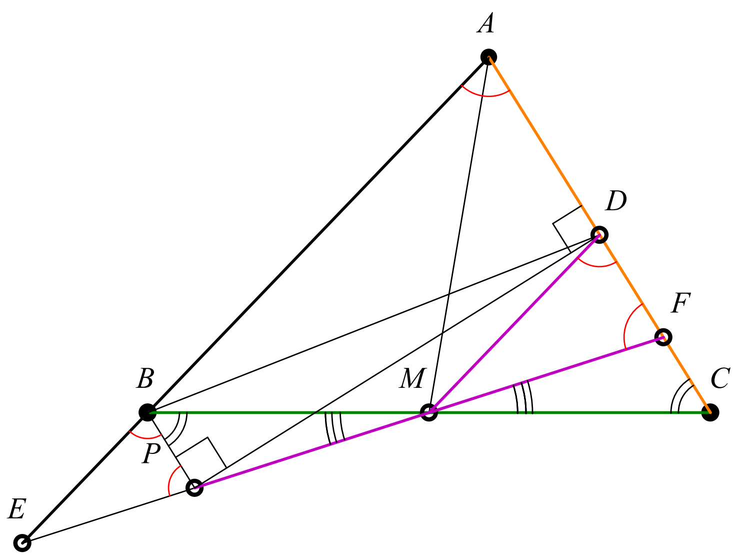
Olimpiadă Polonia, 2014

Soluţie
Egalitatea $(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$ se scrie $ac + bd = ab + cd$, adică $a(c - b) - d(c - b) = 0$, deci $(a - d)(b - c) = 0$. Deducem că fie $a = d$, fie $b = c$.
Similar, egalitatea $(a+c)(b+d) = (a+d)(b+c)$ revine la $(a-b)(c-d) = 0$, adică la $a = b$ sau $c = d$.
Dacă $a = d$, atunci relaţiile de mai sus arată că avem fie $a = b = d$, fie $a = c = d$.
Dacă $b = c$, atunci relaţiile de mai sus arată că fie $a = b = c$, fie $b = c = d$.
În concluzie, în oricare din cazuri, cel puţin trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Remarcă: Este suficient ca trei dintre numere să fie egale pentru ca egalităţile din enunţ să fie satisfăcute. De exemplu, dacă trei dintre numere sunt egale cu x, iar cel de-al patrulea este y, atunci $(a+b)(c+d) = (a+c)(b+d) = (a+d)(b+c) = 2x^2+2xy$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare, M mijlocul laturii $[BC]$ şi D mijlocul laturii $[AC]$. Notăm cu P proiecţia vârfului B pe mediatoarea laturii $[AC]$ şi cu E punctul de intersecţie a dreptelor AB şi MP.
Demonstraţi că $[EB] \equiv [EP]$.

din cartea *Geometri Günlüğü, de Kadir Altintaş*, pb 397



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*-ORADEA): Notând cu $\{F\} = AC \cap ME$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} PB \perp PD \\ PD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow PB \parallel AC \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \boxed{\widehat{EBP}} \equiv \underline{\widehat{BAC}}; & (1) \\ \boxed{\widehat{EPB}} \equiv \underline{\underline{\underline{\widehat{MFD}}}}; & (2) \\ \widehat{PBM} \equiv \widehat{MCF}. & (3) \end{array}\right.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\left.\begin{array}{r} [BM] \equiv [MC] \\ [BC] \cap [PF] = \{M\} \Rightarrow \widehat{BMP} \equiv \widehat{CMF} \\ \widehat{PBM} \equiv \widehat{MCF}; \quad (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MBP \equiv \Delta MCF\,(ULU) \Rightarrow [PM] \equiv [MF]; \quad (4)$$

şi

$$\left.\begin{array}{l} [AD] = [DC] \\ [BM] \equiv [MC] \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow \underline{\widehat{BAC}} \equiv \underline{\underline{\widehat{MDF}}}; \quad (5)$$

iar din:

$$\left.\begin{array}{l} PD \perp DF \\ [PM] \equiv [MF]; \quad (4) \end{array}\right\} \Rightarrow [DM] \equiv [MF] \Leftrightarrow \underline{\underline{\widehat{MDF}}} \equiv \underline{\underline{\underline{\widehat{DFM}}}}. \quad (6)$$

În fine, din relaţiile (1), (5), (6) şi (2), rezultă că: $\widehat{EBP} \equiv \widehat{EPB} \Leftrightarrow [EP] \equiv [EB]$.■

Problema 4. Fie S mulţimea numerelor de două cifre care nu conţin cifra 0. Două numere din S se zic *prietene* dacă cifrele lor cele mai mari sunt egale şi diferenţa dintre cifrele lor cele mai mici este egală cu 1. De exemplu, 38 şi 84 sunt prietene, 89 şi 99 sunt prietene, dar 58 şi 75 nu sunt prietene.
Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care există o submulţime M a lui S care are n elemente astfel încât nicicare două din elementele lui M nu sunt prietene. (Cu alte cuvinte: care e numărul maxim de elemente pe care le poate avea o submulţime care nu conţine perechi de numere prietene?)

Concurs Franţa

Soluţie:
Grupăm cele 81 de numere din mulţimea S astfel:
$\{99\}$, $\{98, 89\}$, $\{97, 79\}$, $\{96, 69\}$, $\{95, 59\}$, $\{94, 49\}$, $\{93, 39\}$, $\{92, 29\}$, $\{91, 19\}$
$\{88\}$, $\{87, 78\}$, $\{86, 68\}$, $\{85, 58\}$, $\{84, 48\}$, $\{83, 38\}$, $\{82, 28\}$, $\{81, 18\}$
$\{77\}$, $\{76, 67\}$, $\{75, 57\}$, $\{74, 47\}$, $\{73, 37\}$, $\{72, 27\}$, $\{71, 17\}$
$\{66\}$, $\{65, 56\}$, $\{64, 46\}$, $\{63, 36\}$, $\{62, 26\}$, $\{61, 16\}$
$\{55\}$, $\{54, 45\}$, $\{53, 35\}$, $\{52, 25\}$, $\{51, 15\}$
$\{44\}$, $\{43, 34\}$, $\{42, 24\}$, $\{41, 14\}$
$\{33\}$, $\{32, 23\}$, $\{31, 13\}$
$\{22\}$, $\{21, 12\}$
$\{11\}$.
Este evident că dacă îl alegem pe $\overline{ab}$, cu $a \neq b$, în M, îl putem alege şi pe $\overline{ba}$: dacă $\overline{ab}$ nu are prieteni în M, nici $\overline{ba}$ nu va avea.
Observăm că un număr nu are prieteni decât pe acelaşi rând cu el, şi anume în mulţimile vecine. Nu putem alege două elemente aflate în mulţimi vecine. Aşadar, de pe rândul 1 putem alege cel mult 9 numere (cele care au ambele cifre impare), de pe rândul al doilea putem alege cel mult 8 numere (cele care au cifra mai mică impară), şi aşa mai departe, până la ultimul rând din care putem alege cel mult un număr, pe 11.
Putem aşadar alege cel mult $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ de numere.
Pe de altă parte, putem alege 45 de numere, şi anume pe cele care au cifra mai mică impară, astfel încât printre numerele alese să nu existe numere prietene.
În concluzie, numărul căutat este 45.