Stelele Matematicii 2018, Juniori – Soluţii

Problema 1. Numerele naturale nenule a şi b au proprietatea că produsul divizorilor pozitivi ai lui a este egal cu produsul divizorilor pozitivi ai lui b. Rezultă că a şi b sunt egale?

baraj OIM, Belarus, 1999

Soluţie. Da, rezultă că $a = b$. Dacă notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor numărului natural nenul n, atunci produsul divizorilor lui a este $\sqrt{a^{d(a)}}$. Într-adevăr, grupând fiecare divizor d al lui a cu $\frac{a}{d}$, care este tot un divizor al lui a, obţinem că

$$a^{d(a)} = \prod_{d|a} d \cdot \frac{a}{d} = \prod_{d|a} d \cdot \prod_{d|a} \frac{a}{d} = \prod_{d|a} d \cdot \prod_{d|a} d = \left(\prod_{d|a} d\right)^2.$$

Analog, produsul divizorilor lui b este $\sqrt{b^{d(b)}}$. Dacă a şi b au acelaşi produs al divizorilor, atunci $a^{d(a)} = b^{d(b)}$. Trebuie, evident, ca a şi b să aibă aceiaşi factori primi. Presupunem că $d(a) < d(b)$ şi notăm cu a_i şi b_i exponentul unui factor prim p_i în descompunerea în factori primi a lui a, respectiv b. Trebuie să avem $a_i \cdot d(a) = b_i \cdot d(b)$, adică $a_i > b_i$ pentru orice i. Atunci $b \mid a$, deci $d(b) \leq d(a)$, contradicţie. Analog se ajunge la contradicţie decă $d(a) > d(b)$. Rămâne, deci, că $d(a) = d(b)$ şi atunci $a^{d(a)} = b^{d(b)}$ implică $a = b$.

Problema 2. Determinaţi cel mai mic număr natural k cu următoarea proprietate:

Oricum alegem k numere naturale diferite şi coprime două câte două din mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$, *cel puţin unul dintre numerele alese este număr prim.*

Vlad Robu

Soluţie. Nuărul cerut este 16. Mai întâi vom arăta că este posibil să alegem 15 numere care sunt coprime şi diferite două câte două din mulţimea M astfel încât niciunul să nu fie prim. Pentru aceasta, vom alege numerele 1, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2 şi 43^2. Este evident că sunt verificate condiţiile impuse.

Să presupunem acum că am putea alege 16 numere diferite din M, oricare două coprime, astfel încât niciunul din ele să nu fie prim. Cel puţin 15 din aceste numere sunt diferite de 1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{15} > 1$ 15 asemenea numere. Fiind mai mari ca 1, ele sunt compuse. Fie p_i cel mai mic divizor prim al lui a_i. Atunci $a_i \geq p_i^2$, pentru orice i. Cum toate numerele a_i sunt coprime, toate numerele p_i sunt diferite. Însă primele 15 numere prime sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, de unde deducem că cel mai mare dintre p_i-uri este cel puţin 47, dar atunci a_i-ul corespunzător este cel puţin $47^2 > 2018$, contradicţie!

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez isoscel în care AB este baza mare şi $BC = CD = DA$. Construim un romb $KLMN$ astfel încât $K \in (AB)$, $L \in (BC)$, $M \in (CD)$ şi $N \in (DA)$.
Demonstraţi că $\angle DAB \equiv \angle KNM$.

Vlad Robu

Soluţia 1. *Pasul I.* Vom arăta că $DN = BL$ şi $AN = CL$.
În triunghiurile MDN şi KBL ştim că $MN = KL$, $\sin MDN = \sin KBL$ (deoarece cele două unghiuri sunt suplementare) şi, întrucât $DM \parallel BK$ şi $MN \parallel KL$, unghiurile $\angle DMN$ şi $\angle BKL$ sunt congruente sau suplementare. În orice caz, $\sin DMN = \sin BKL$. Aplicăm Teorema sinusurilor în cele două triunghiuri şi obţinem

$$\frac{MN}{\sin MDN} = \frac{DN}{\sin DMN} \text{ şi } \frac{KL}{\sin KBL} = \frac{BL}{\sin BKL}.$$

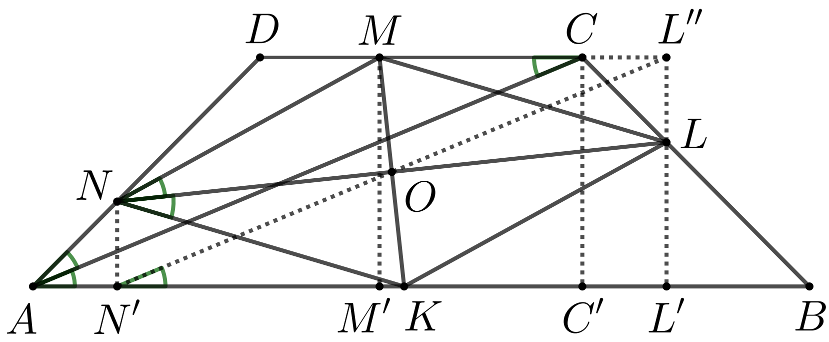
Conform observaţiilor anterioare, obţinem $DN = BL$. Cum $AD = CB$, obţinem şi că $AN = CL$.

Pasul II. Arătăm că $AN = DM = CL$ şi $DN = CM = BL$.
Fie M_0 punctul de pe segmentul (CD) pentru care $AN = DM_0 = CL$. Atunci $DN = CM_0 = BL$. Dar atunci triunghiurile ΔNDM_0 şi ΔM_0CL sunt congruente din cazul de congruenţă L.U.L., deci $M_0N = M_0L$. Cum mediatoarea segmentului $[NL]$ poate intersecta dreapta CD în cel mult un punct, deducem că $M = M_0$.

Triunghiurile NDM şi MCL sunt congruente, deci $m(\angle NML) = 180° - m(\angle DMN) - m(\angle DNM) = m(\angle NDM) = m(\angle ADC)$. Acestea fiind spuse, $m(\angle KNM) = 180° - m(\angle NML) = 180° - m(\angle ADC) = m(\angle DAB)$.

Soluţia 2. Dacă O este punctul de intersecţie a diagonalelor rombului, h este înălţimea trapezului, iar C', L', M', N', O' sunt proiecţiile punctelor C, L, M, N, O pe dreapta AB, atunci $OO' = MM'/2 = h/2$ şi $LL' + NN' = 2OO' = h$. Dacă notăm cu L'' poiecţia lu L pe dreapta CD, atunci $LL'' = h - LL' = NN'$, deci triunghiurile $LL''C$ şi $NN'A$ sunt congruente (C.U.). Rezultă că $AN = CL$ (şi $AD = LB$).

Patrulaterul $NOKN'$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[NK]$), deci $m(\angle KNM) = 2m(\angle KNO) = 2m(\angle KN'O)$. Dar $N'N" = h = 2OO'$ şi O' mijlocul lui $[N'L']$ implică N', O, L'' coliniare, deci $2m(\angle KN'O) = 2m(\angle L'N'L'')$. Avem $AN' = CL'' = C'L'$, deci $AC' = N'L'$. Atunci triunghiurile ACC' şi $N'L''L'$ sunt congruente (C.C.), deci $m(\angle KNM) = 2m(\angle L'N'L'') = 2m(\angle BAC) = m(\angle DAB)$ deoarece, triunghiul ACD fiind isoscel, avem $\angle CAB \equiv \angle DCA \equiv \angle DAC$.



Problema 4. Fie $n \geq 4$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere nenegative. Demonstraţi că

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2(a_2 + a_3 + a_4)^2 \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n + a_1)^2(a_n + a_1 + a_2)^2 \geq$$

$$2^n(a_1 + a_2)^2(a_2 + a_3)^2 \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)^2(a_n + a_1)^2.$$

Când are loc egalitatea?

Soluţie. Arătăm că pentru orice $a, b, c, d \geq 0$ are loc dubla inegalitate $(a + b + c)^2(b + c + d)^2 \geq (a + b + c + d)^2(b + c)^2 \geq 4(a + b)(c + d)(b + c)^2$, cu egalitate dacă $ad = 0$ şi , în plus, $a + b = c + d$ sau $b = c = 0$.

Într-adevăr, prima inegalitate revine la $(a+x)(d+x) \geq x(a+d+x)$, unde $x = b+c$. Această inegalitate este evidentă. Inegalitatea a doua rezultă din $(u + v)^2 \geq 4uv$ scrisă pentru $u = a + b$, $v = c + d$ şi înmulţită apoi cu $(b + c)^2 \geq 0$. Aşadar dubla inegalitate de mai sus este demonstrată. Scriind atunci că $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})^2(a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3})^2 \geq 4(a_i + a_{i+1})(a_{i+1} + a_{i+2})^2(a_{i+2} + a_{i+3})$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ (indicii sunt luaţi modulo n) şi înmulţind aceste relaţii obţinem concluzia.

Egalitate avem dacă cel puţin una din inegalităţile de mai sus este $0 \geq 0$ sau dacă avem egalitate în fiecare din ele.

Egalitatea are loc dacă avem trei 0-uri consecutive (indicii sunt luaţi modulo n) sau alternează 0-uri cu numere nenule (egale) - variantă posibilă numai dacă n este par.

Într-adevăr, dacă avem doi de 0 consecutivi atunci revenind la ecuaţie trebuie să avem trei de 0 consecutivi.

Dacă nu avem două 0-uri consecutive, trebuie ca, pentru orice secvenţă a, b, c, d, e de numere cu indici consecutivi (modulo n) să avem $ad = 0$ şi $a + b = c + d$. Dacă $d = 0$, din $be = 0$ şi $e \neq 0$ rezultă $b = 0$, deci 0-urile vin din 2 în doi. Din condiţia $b + c = d + e$ rezultă că numerele nenule sunt şi ele egale. Prin urmare, dacă n este par, mai avem egalitate şi dacă $x_{2k} = 0$ şi $x_{2k+1} = t > 0$ pentru orice k sau invers, iar dacă n este impar, atunci nu avem alte cazuri de egalitate.