

**Problema săptămânii 124**

Moș Crăciun a scris în fiecare pătrățel unitate al unui tabel  $2018 \times 2018$  câte un număr natural nenul.

Elful Blink poate înmulți cu 2 toate numerele dintr-o linie a tabelului.

Elful Groot poate să scadă 1 din toate numerele dintr-o coloană a tabelului.

Arătați că, lucrând în echipă, cei doi elfi pot face ca toate numerele din tabel să devină egale cu 0.

**Soluție:**

Numerotăm coloanele de la 1 la 2018. Vom lua pe rând coloanele în ordinea numerotării și vom face toate elementele respectivei coloane să fie 0 fără a le strica pe cele dinaintea ei care au fost deja făcute să conțină numai 0-uri.

Să presupunem că lucăm pe coloana  $k$ . Pe coloanele  $1, 2, \dots, k - 1$  avem numai 0, pe coloanele  $k, k + 1, \dots, 2018$  avem numai numere naturale nenule.

Vrem să facem toate elementele coloanei  $k$  să fie 0. Ne uităm la cel mai mare element de pe această coloană. Dacă acesta este 1, atunci toate numerele sunt 1, deci, Elful Groot poate face ca pe această coloană să avem numai 0-uri. Dacă cel mai mare element este  $m > 1$ , îl vom micșora după cum urmează: vom înmulți cu 2 numerele de pe liniile care, la intersecția cu coloana  $k$ , au scris numărul 1, apoi vom scădea 1 din toate elementele coloanei  $k$ . Prin această pereche de operații, toate numerele coloanei  $k$  care au fost egale cu 1 au rămas egale cu 1, în vreme ce toate celelalte ale sale au scăzut cu câte 1. Este evident că maximum scade cu 1, deci după efectuarea de  $m - 1$  ori a acestei perechi de operații se ajunge ca toate elementele coloanei să fie 1, iar după încă o operație, toate elementele să fie 0. Să mai observăm că niciuna din aceste operații nu modifică 0-urile deja făcute pe coloanele precedente și nu modifică nici proprietatea numerelor de pe coloanele următoare de a fi nenule.

**Problem of the week no. 124**

Santa Claus has written a positive integer in each unit cell of a  $2018 \times 2018$  table. Blink the Elf can multiply by 2 all the numbers situated on any of the lines of the table.

Groot the Elf can subtract 1 from all the numbers situated on any of the columns of the table.

Prove that, by working together, the two elves can make all the numbers in the table to be equal to 0.

**Solution:**

We label the columns from 1 to 2018. We will make successively all the columns to be 0 without ruining the columns that have already made 0.

Let us work on column no.  $k$ . Each of the columns  $1, 2, \dots, k - 1$  contains only 0-s, while columns  $k, k + 1, \dots, 2018$  only contain positive integers.

We want to make all the elements on column no.  $k$  to be 0. We look at the largest number on this column. If it is equal to 1, then all the numbers of the columns are 1, and Groot can turn this column into 0-s. If the largest number is  $m > 1$ , we will diminish it as follows: we multiply by 2 all the numbers situated on rows whose

intersection with column  $k$  contains a 1, then we subtract 1 from all the numbers of column  $k$ . By this pair of operations, all the numbers of the column that were equal to 1 stay equal to 1, while all the others diminish by 1. Obviously, the largest number also diminishes by 1, therefore, after  $m - 1$  pairs of such operations, all the numbers of the column become equal to 1, and after one more operation, they become all 0.

Let us also note that none of the operations that we have performed did destroy the 0-s already created on the previous columns, nor did they affect the other numbers' property of being non-zero.