

Problema săptămânii 123

- a) Există 14 numere naturale consecutive, fiecare din ele divizibil cu cel puțin unul din numerele prime p din intervalul $2 \leq p \leq 11$?
- b) Există 21 numere naturale consecutive, fiecare din ele divizibil cu cel puțin unul din numerele prime p din intervalul $2 \leq p \leq 13$?

Olimpiadă SUA, 1986

Soluție:

- a) Răspunsul este nu.

Să ignorăm cele 7 numere pare. Dintre celelalte, cel mult trei sunt divizibile cu 3, cel mult două sunt divizibile cu 5, cel mult unul cu 7 și cel mult unul cu 11. Avem așadar că 7 numere impare consecutive pot fi divizibile cu numere din mulțimea $\{3, 5, 7, 11\}$ numai dacă primul și ultimul din cele 7 numere sunt divizibile cu 3 (altfel nu avem 3 numere impare divizibile cu 3). Dar atunci cele două numere impare divizibile cu 5 nu mai pot fi diferite de acestea două (nu avem numere impare nedivizibile cu 3 care să fie la distanță 10), deci nu putem avea și 3 multipli impari de 3 și doi multipli impari de 5 (diferiți de aceștia), deci nu putem avea 14 numere cu proprietatea din enunț.

- b) Răspunsul este da.

Dacă notăm c ele 21 de numere consecutive $n - 10, n - 9, \dots, n + 10$, alegem n divizibil cu 2, 3, 5, 7, deci cu 210. Atunci, dintre cele 21 de numere, numai $n - 1$ și $n + 1$ nu sunt divizibile cu niciunul din numerele 2, 3, 5, 7. Alegem $n \equiv 0 \pmod{210}$, $n \equiv 1 \pmod{11}$ și $n \equiv -1 \pmod{13}$. Conform Teoremei chinezești a resturilor, această alegere este posibilă. Pentru această alegere, fiecare din numerele consecutive de la $n - 10$ la $n + 10$ este divizibil cu cel puțin unul din numerele prime de la 2 la 13. De fapt, condițiile de mai sus conduc la $n = 9450$, adică la numerele de la 9440 la 9460. Acestea sunt chiar cele mai mici numere cu proprietatea din enunț.

Problem of the week no. 123

- a) Do there exist 14 consecutive positive integers each of which is divisible by one or more primes p from the interval $2 \leq p \leq 11$?
- b) Do there exist 21 consecutive positive integers each of which is divisible by one or more primes p from the interval $2 \leq p \leq 13$?

USAMO, 1986

English solutions can be found on AoPS or here.