Problema săptămânii 122
a) Fie n un număr natural nenul şi fie S o mulţime formată din $n+2$ numere întregi de modul mai mic sau egal cu n. Demonstraţi că există în S trei elemente distincte a, b, c astfel încât $a+b=c$.

Olimpiadă India, 1998

b) Fie n un număr natural impar şi fie S o mulţime formată din $n+2$ numere întregi de modul mai mic sau egal cu n. Demonstraţi că există în S trei elemente distincte a, b, c astfel încât $a+b+c=0$.

test de antrenament Franţa, 2014

Soluţie:
a) Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după n.
Pentru $n=1$ afirmaţia este evidentă: S trebuie să fie exact $\{-1,0,1\}$ şi atunci $-1+1=0$.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $n-1$, să o demonstrăm pentru n.
Fie aşadar $n+2$ numere din mulţimea $\{-n,-n+1,\ldots,n-1,n\}$. Dacă printre aceste numere nu se află şi $-n$ şi n, atunci avem cel puţin $n+1$ dintre numerele cu modulul cel mult $n-1$, astfel că, potrivit ipotezei de inducţie, găsim trei numere a, b, c astfel ca $a+b=c$.
Dacă n se află printre numerele alese, ne uităm la perechile de numere $(-n,0)$, $(-n+1,1)$, $(-n+2,2)$, ... , $(-1,n-1)$. Din aceste n perechi trebuie să alegem $n+1$ numere, deci, din principiul cutiei, va trebuie să alegem ambele numere dintr-o pereche $(-n+k,k)$. Dar $n+(-n+k)=k$, de unde concluzia.

b) Fie $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după k.
Pentru $k=0$ afirmaţia este evidentă: S trebuie să fie exact $\{-1,0,1\}$ şi atunci $-1+0+1=0$.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $k-1$, să o demonstrăm pentru k.
Fie aşadar $2k+3$ numere din mulţimea $\{-2k-1,-2k,\ldots,2k,2k+1\}$. Dacă printre aceste numere se află $2k+1$ cu modulul cel mult $2k-1$, atunci, potrivit ipotezei de inducţie, găsim printre ele trei numere a, b, c astfel ca $a+b+c=0$.
Dacă printre aceste numere nu avem $2k+1$ numere cu modulul cel mult $2k-1$, atunci înseamnă că am ales cel puţin trei dintre numerele $-2k-1$, $-2k$, $2k$ şi $2k+1$. Schimând eventual semnele tuturor numerelor, putem presupune că am ales numerele $2k$, $2k+1$ şi cel puţin unul din numerele $-2k$ şi $-2k-1$. Dacă 0 a fost ales, avem trei numere cu suma 0. Să presupunem că 0 nu a fost ales şi să ne uităm la perechile: $(-1,-2k)$, $(-2,-2k+1)$, ... , $(-k,-k-1)$. Dacă dintr-o pereche am ales ambele numere, atunci acestea, împreună cu $2k+1$ ne oferă o soluţie a ecuaţiei $a+b+c=0$. Aşadar, putem alege cel mult k din numerele de la $-2k$ la -1.
În continuare distingem două cazuri:
1) dacă $-2k-1$ a fost şi el ales, atunci analog se arată că, dacă nu avem trei numere cu suma 0, atunci am ales cel mult k dintre numerele de la 1 la $2k$. Dar

atunci am ales cel mult $2k+2$ numere, contradicţie.
2) dacă $-2k-1$ nu a fost ales, atunci $-2k$ a fost ales şi ne uităm la perechile $(1, 2k-1)$, $(2, 2k-2)$, ... , $(k-1, k+1)$. Dacă dintr-o pereche am ales ambele numere, atunci acestea, împreună cu $2k$ ne oferă o soluţie a ecuaţiei $a+b+c=0$. Aşadar, putem alege cel mult k din numerele de la 1 la $2k-1$ (putem alege cel mult un număr din fiecare din cele $k-1$ perechi, plus numărul k care nu face parte din niciuna din perechi). Aşadar, în acest caz putem avea alese cel mult k numere negative şi $k+2$ pozitive, deci $2k+2$ numere în total, contradicţie.
Aşadar, în orice caz au fost alese trei numere cu suma 0.

Remarcă: La problema b) ipoteza n impar este esenţială: pentru $n=2$, din mulţimea $\{-2, -1, 1, 2\}$ nu se pot extrage trei numere cu suma 0.

Problem of the week no. 122
a) Let n be a positive integer, and let S be a set of $n+2$ integers, each of absolut value at most n. Show that there exist three distinct elements of S, a, b, c, such that $a+b=c$.

Indian Olympiad, 1998

b) Let n be an odd positive integer, and let S be a set of $n+2$ integers, each of absolut value at most n. Show that there exist three distinct elements of S, a, b, c, such that $a+b+c=0$.

French training, 2014

Solution:
a) We prove the statement by induction after n.
For $n=1$ the statement is obvious: S needs to be exactly $\{-1, 0, 1\}$, and then $-1+1=0$.
Assuming the statement to be true for $n-1$, let us prove it for n.
Consider $n+2$ elements of the set $\{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$. If among these numbers there are both $-n$ and n, then we have at least $n+1$ numbers with absolute value at most $n-1$, and thus, according to the inductive hypothesis, we can find among them three numbers a, b, c such that $a+b=c$.
If n is among the chosen numbers, we look at the following pairs: $(-n, 0)$, $(-n+1, 1)$, $(-n+2, 2)$, ... , $(-1, n-1)$. Of these n pairs we must chose $n+1$ numbers, hence, by Dirichlet's Principle, we must chose both numbers belonging to some pair $(-n+k, k)$. But $n+(-n+k)=k$, hence the conclusion.

b) Let $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. We prove the statement by induction after k.
For $k=0$ the statement is obvious: S needs to be exactly $\{-1, 0, 1\}$, and then $-1+0+1=0$.
Assuming the statement to be true for $k-1$, let us prove it for k.
Consider $2k+3$ numbers from the set $\{-2k-1, -2k, \dots, 2k, 2k+1\}$. If among these $2k+3$ numbers there are $2k+1$ with absolute value at most $2k-1$, then, according to the inductive hypothesis, we can find among them three numbers a, b, c

such that $a+b+c=0$.
If among the chosen numbers we cannot find $2k+1$ with absolute value at most $2k-1$, then we must have chosen at least three of the numbers $-2k-1$, $-2k$, $2k$ şi $2k+1$. If necessary, we can change the signs of all the numbers, therefore, without los of generality, we may assume that among the $2k+3$ chosen numbers there are $2k$, $2k+1$ and at least one of the numbers $-2k$ and $-2k-1$. If 0 has been chosen, we have already three numbers with the sum 0. Let us consider that 0 has not been chosen at let us examine the following pairs: $(-1,-2k)$, $(-2,-2k+1)$, $\dots$, $(-k,-k-1)$. If from one pair we have chosen both numbers, then, these two, together with $2k+1$ give us a solution of the equation $a+b+c=0$. If we chose at most one numbers from each pair, we have chosen at most k of the numbers from $-2k$ to -1.
Next, we distinguish two cases:
1) if $-2k-1$ has also been chosen, then, as above, either we have three numbers with the sum 0, or we have chosen at most k of the numbers from 1 to $2k$. But this latter possibility would mean that we have chosen at most $2k+2$ numbers, which is a contradiction.
2) if $-2k-1$ has not been chosen, then $-2k$has been chosen and we look at the following pairs: $(1,2k-1)$, $(2,2k-2)$, $\dots$, $(k-1,k+1)$. If from one pair we have chosen both numbers, then, these two, together with $2k$ constitute a solution of the equation $a+b+c=0$. So let us assume that we have considered at most one number from each of these pairs, i.e. at most k of the numbers from 1 to $2k-1$ (one numbers from each of the $k-1$ pairs, plus the number k which is not part of any of the pairs). Thus, in this last case, we have chosen at most k negative numbers at at most $k+2$ positive ones, so $2k+2$ numbers in total, which is a contradiction showing that this last case can not occur.
In conclusion, in each possible case, one can find three chosen numbers whose sum is 0.

Remark: At b) the hypothesis that n is odd is essential: for $n=2$, from the set $\{-2,-1,1,2\}$ one cannot extract three numbers whose sum is 0.