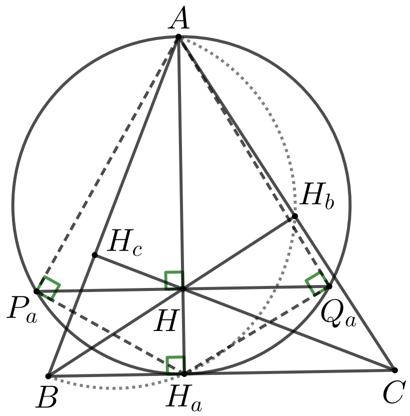
Problema săptămânii 120
Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Fie H_a piciorul perpendicularei din A pe BC şi fie P_a şi Q_a punctele în care paralela prin H la BC intersectează cercul de diametru $[AH_a]$. În mod similar se definesc punctele P_b, Q_b şi P_c, Q_c. Arătaţi că punctele $P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c, Q_c$ sunt conciclice.

Olimpiadă Germania, 2018

Soluţie:
Din puterea punctului H faţă de cercul de diametru $[AB]$ (pe care se găsesc atât H_a cât şi H_b) rezultă $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b$. Analog se arată că $HA \cdot HH_a = HC \cdot HH_c$, deci $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b = HC \cdot HH_c \overset{\text{not.}}{=} \rho$. (Sau, considerând simetricul lui H faţă de BC, se vede că $HA \cdot HH_a$ este jumătate din puterea punctului H faţă de cercul circumscris triunghiului ABC, de unde $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b = HC \cdot HH_c$.)
Din puterea punctului H faţă de cercul de diametru $[AH_a]$ avem $HA \cdot HH_a = HP_a \cdot HQ_a = \rho$. Similar se obţin alte două relaţii analoage.
În fine, cum P_a se află pe cercul de diametru $[AH_a]$, unghiul $\sphericalangle AP_aH_a$ este drept, iar HP_a, fiind paralel cu BC, este perpendicular pe AH_a. Atunci, din teorema înălţimii, rezultă $HP_a = \sqrt{\rho}$, deci P_a se află pe cercul de centru H şi rază $\sqrt{\rho}$. Analog se arată că pe acest cerc se găsesc şi celelalte cinci puncte. (Sau, altfel, coarda $[P_aQ_a]$ este perpendiculară pe diametru $[AH_a]$ cu care se intersectează în H, deci $HP_a = HQ_a = \sqrt{\rho}$.)



Problem of the week no. 120
Let H be the orthocenter of the acute triangle ABC. Let H_a be the foot of the perpendicular from A to BC and let the line through H parallel to BC intersect the circle with diameter AH_a in the points P_a and Q_a. Similarly, we define the points P_b, Q_b and P_c, Q_c. Show that the six points $P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c, Q_c$ lie on a common circle.

Bundeswettbewerb Mathematik 2018, Round 1 - pb 3

Solution:

From the power of point H with respect to the circle of diameter $[AB]$ (to which belong both H_a and H_b) it follows that $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b$. Similarly we obtain $HA \cdot HH_a = HC \cdot HH_c$, hence $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b = HC \cdot HH_c \overset{\text{not.}}{=} \rho$. (It is actually half of the power of H with respect to the circumcircle of triangle ABC.)

From the power of point H with respect to the circle of diameter $[AH_a]$ we have $HA \cdot HH_a = HP_a \cdot HQ_a = \rho$. Similarly one obtains the two analogues.

Finally, as P_a lies on the circle of diameter $[AH_a]$, angle $\sphericalangle AP_aH_a$ is right, while HP_a, being parallel to BC, is perpendicular to AH_a. It follows that $HP_a = \sqrt{\rho}$, which shows that P_a is on the circle centered at H with radius $\sqrt{\rho}$. It follows similarly that the other five points also belong to this circle. (Alternatively, one could notice that the chord $[P_aQ_a]$ is perpendicular to the diameter $[AH_a]$ which it intersects at H, hence $HP_a = HQ_a = \sqrt{\rho}$.)