Problema săptămânii 119
Fie n un număr natural impar şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale nenule. Notăm cu A produsul numerelor a_i şi cu d cel mai mare divizor comun al lor. Arătaţi că

$$c.m.m.d.c.(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) \leq 2d^n.$$

baraj de seniori, Franţa, 2018

Soluţie: (oficială)
Pentru orice i, notăm $b_i = a_i/d$, astfel că $c.m.m.d.c.(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ şi fie $B = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ şi $\Delta = c.m.m.d.c.(b_1^n + B, b_2^n + B, \ldots, b_n^n + B)$. Atunci $c.m.m.d.c.(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) = d^n \cdot \Delta$ şi rămâne de demonstrat că $\Delta \leq 2$. Fie p un eventual factor prim al lui Δ. Dacă p divide unul dintre numerele b_i, atunci el îl divide şi pe B, deci divide fiecare din numerele b_j, ceea ce este absurd. În consecinţă, p nu divide niciunul din numerele b_i, deci nu îl divide nici pe B. Acest lucru arată că Δ este prim cu B.

Dar, cum $b_1^n \equiv b_2^n \equiv \ldots \equiv b_n^n \equiv -B \pmod{\Delta}$, avem $B^n \equiv b_1^n \cdot b_2^n \cdot \ldots \cdot b_n^n \equiv (-1)^n B^n \equiv -B^n \pmod{\Delta}$. În consecinţă, Δ divide $2B^n$. Deducem că Δ divide 2, ceea ce încheie demonstraţia.

Problem of the week no. 119
Let n be an odd positive integer, and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive integers. Denote by A the product of the numbers a_i and by d their greatest common divisor. Prove that

$$g.c.d.(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) \leq 2d^n.$$

TST France, 2018

Solution: (official)
For all i, put $b_i = a_i/d$. Thus $g.c.d.(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ and let $B = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ and $\Delta = g.c.d.(b_1^n + B, b_2^n + B, \ldots, b_n^n + B)$. Then $g.c.d.(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) = d^n \cdot \Delta$ and all that remains to prove is $\Delta \leq 2$. Let p a prime factor of Δ (if it has one). If p divides one of the numbers b_i, then it also divides B, hence it divides all the numbers b_j, which contradicts the fact that their $g.c.d.$ is 1. It follows that p does not divide any of the numbers b_i, which means it does not divide their product, B, either. This shows that Δ is co-prime with B.

But, as $b_1^n \equiv b_2^n \equiv \ldots \equiv b_n^n \equiv -B \pmod{\Delta}$, we have $B^n \equiv b_1^n \cdot b_2^n \cdot \ldots \cdot b_n^n \equiv (-1)^n B^n \equiv -B^n \pmod{\Delta}$. It follows that Δ divides $2B^n$. We deduce that Δ divides 2, which finishes the proof.