Problema săptămânii 118

O descompunere a unui număr natural nenul n este o scriere a acestuia ca sumă de numere naturale nenule (nu neapărat distincte). Două scrieri care conţin aceiaşi termeni dar în altă ordine sunt considerate a fi diferite. Arătaţi că numărul de descompuneri ale unui număr natural nenul n este 2^{n-1}.

Soluţia 1:

Scriem pe o bucată de hârtie n steluţe în rând. Între aceste n steluţe se află $n-1$ spaţii. În unele din aceste spaţii punem nişte bare separatoare. Corespunzător fiecărei alegeri a aşezării barelor obţinem câte o descompunere a lui n: primul termen va fi numărul de steluţe până la prima bară, al doilea termen va fi numărul de steluţe de la prima bară până la cea de-a doua, şi aşa mai departe. De exemplu, dacă $n = 8$, alegerii barelor ca în configuraţia de mai jos

$$\underbrace{*\ *}_{2}\,|\,\underbrace{*\ *\ *\ *}_{4}\,|\,\underbrace{*}_{1}\,|\,\underbrace{*}_{1}$$

îi corespunde descompunerea $8 = 2+4+1+1$. Aşadar, avem atâtea descompuneri pentru n ca şi alegeri ale submulţimii de intervale dintre steluţe în care punem bare. Sunt $n-1$ intervale, deci 2^{n-1} alegeri. (Submulţimii vide îi corespunde descompunerea $n = n$.)

Soluţia 2:

Vom demonstra afirmaţia prin inducţie tare după n.
Este evident că 1 are o descompunere ($1 = 1$).
Presupunând că fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ are $d(k) = 2^{k-1}$ descompuneri, arătăm că $n+1$ are $d(n+1) = 2^n$ descompuneri. Pentru fiecare $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ îl putem scrie pe $n+1$ ca fiind $A + j$ unde A este o descompunere arbitrară a lui $n+1-j$. În afară de aceste scrieri, mai există doar scrierea lui $n+1 = (n+1)$ ca sumă de un singur termen. Avem aşadar, conform ipotezei de inducţie,

$$d(n+1) = 1 + d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n.$$

Problem of the week no. 118

A decomposition of number a n is writing n as a sum of positive integers (not necessarily distinct). The order of addends does matter. Show that the number of decompositions of a positive integer n is 2^{n-1}.

Solution 1:

We write on a sheet of paper n stars in a row. These n stars determine $n-1$ intervals between them. In some of these intervals we put a separating vertical bar. Corresponding to each choice of the intervals in which we put a bar, we obtain a decomposition of n: the first term will be the number of stars until the first bar, the second term will be the number of stars situated between the first and the second bar, and so on. For example, if $n = 8$, the configuration

$$\underbrace{*\ *}_{2}\,|\,\underbrace{*\ *\ *\ *}_{4}\,|\,\underbrace{*}_{1}\,|\,\underbrace{*}_{1}$$

corresponds to the decomposition $8 = 2+4+1+1$. Thus, there are as many decompositions of n as there are choices for the intervals in which we put a bar. There are $n-1$ intervals, and a set with $n-1$ elements has 2^{n-1} subsets. In conclusion, n has 2^{n-1} decompositions.

Solution 2:
We prove the statement by strong induction after n.
It is obvious that 1 has only 1 decomposition ($1 = 1$).
Assuming that every $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ has $d(k) = 2^{k-1}$ decompositions, we show that $n+1$ has $d(n+1) = 2^n$ decompositions. For every $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, we can write $n+1$ as $A+j$, where A is an arbitrary decomposition of $n+1-j$. Apart of these decompositions, there is only the decomposition $n+1 = (n+1)$ (a "sum" have a single addend). Thus, according to the inductive hypothesis,

$$d(n+1) = 1 + d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n.$$