Problema săptămânii 117
Fie $n \geq 2$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

All Russian Olympiad, 2018

Soluţia 1: (userii quangminhltv99 şi sqing de pe AoPS; soluţie dată şi de Radu Lecoiu)
Avem

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} \cdot \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} \cdots \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}}$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, avem pentru orice $1 \leq i \leq n$ (indicii sunt luaţi modulo n), avem $(1+x_i^2)(1+x_{i+1}^2) \geq (1+x_ix_{i+1})^2$. Astfel, avem

$$(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_n)^2 \geq (1+x_1x_2)(1+x_2x_3)\cdots(1+x_nx_1),$$

de unde concluzia dorită.

Soluţia 2: (user AoPS anantmudgal09)
Să observăm că $1+ab \leq \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ pentru orice a, b; atunci

$$\begin{aligned}\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} &\geq \sqrt{\frac{1+x_1^2}{1+x_2^2}} + \sqrt{\frac{1+x_2^2}{1+x_3^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1+x_n^2}{1+x_1^2}} \\ &\geq n\end{aligned}$$

ultima inegalitate rezultând din inegalitatea mediilor.
Egalitatea are loc dacă $x_1 = \cdots = x_n$.

Soluţia 3: (inducţie)
Vom demonstra afirmaţia din enunţ prin inducţie după n.
Pentru $n = 2$, inegalitatea de demonstrat este $\dfrac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \dfrac{1+x_2^2}{1+x_2x_1} \geq 2$, inegalitate echivalentă cu $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ care este evident adevărată.
Presupunând afirmaţia din enunţ adevărată pentru un $k \geq 2$ arbitrar, să o demonstrăm pentru $k+1$.
Este suficient ca pentru un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ să avem

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}} + \frac{1+x_{i+1}^2}{1+x_{i+1}x_{i+2}} \geq \frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+2}} + 1. \qquad (*)$$

(Indicii sunt luaţi aici modulo $n+1$.)
Într-adevăr, din relaţia de mai sus, aplicând ipoteza de inducţie pentru numerele

$x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ rezultă concluzia.
Inegalitatea $(*)$ este echivalentă cu

$$-\frac{(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+2})(1 + x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_i^2 x_{i+1} x_{i+2})}{(1 + x_i x_{i+1})(1 + x_i x_{i+2})(1 + x_{i+1} x_{i+2})} \geq 0,$$

relaţie care are loc (de exemplu) dacă îl alegem pe $x_i = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (sau maximul).

Problem of the week no. 117
Let $n \geq 2$ and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive real numbers. Prove that

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} + \ldots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1} \geq n.$$

All Russian Olympiad, 2018, Day 1 Pb. 2

Solution 1: (AoPS users quangminhltv99 and sqing)
We have

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} + \cdots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1} \geq n \sqrt[n]{\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} \cdot \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} \cdots \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1}}$$

Now, by Cauchy-Schwarz, we have for all $1 \leq i \leq n$ (indices are taken modulo n), we have $(1 + x_i^2)(1 + x_{i+1}^2) \geq (1 + x_i x_{i+1})^2$. Thus, we have

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \cdots (1 + x_n)^2 \geq (1 + x_1 x_2)(1 + x_2 x_3) \cdots (1 + x_n x_1),$$

whence we have our desired inequality.

Solution 2: (AoPS user anantmudgal09)
Notice that $1 + ab \leq \sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$ for all a, b; hence

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1 x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2 x_3} + \ldots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n x_1} \geq \sqrt{\frac{1 + x_1^2}{1 + x_2^2}} + \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{1 + x_3^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1 + x_n^2}{1 + x_1^2}}$$
$$\geq n$$

with the last inequality following from AM-GM.
Equality occurs when $x_1 = \cdots = x_n$.

See also on AoPS.