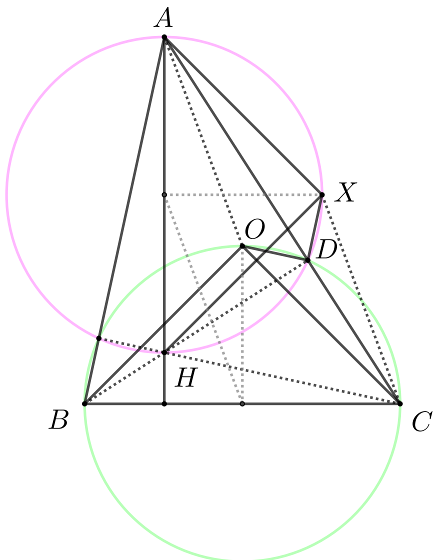
Problema săptămânii 116

În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $m(\angle A) = 45°$, punctele O şi H sunt centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul, iar D este piciorul înălţimii din B. Punctul X este mijlocul arcului AH al cercului circumscris triunghiului ADH care îl conţine pe D. Demonstraţi că $DX = DO$.

Fatemeh Sajadi, Iran Geometry Olympiad 2018, nivelul avansaţi, problema 2

Soluţia 1: (*David Andrei Anghel, Cezar Tulceanu, Bianca Pitu*)
Deoarece $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC) = 90° = m(\sphericalangle BDC)$, patrulaterul $BODC$ este inscriptibil.[1] În plus, triunghiul ADB este dreptunghic cu un unghi de $45°$, deci este isoscel. Aşadar $AD = BD \quad (1)$. Şi patrulaterul $AHDX$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle AXH) = m(\sphericalangle ADH) = 90°$. Cum $AX = HX$, rezultă că $m(\sphericalangle XAH) = 45° = m(\sphericalangle BAC)$, deci $\sphericalangle XAD \equiv \sphericalangle BAH \equiv \sphericalangle BCH \equiv \sphericalangle DCO \equiv \sphericalangle DBO$ (sau, prin calcul, $m(\sphericalangle XAD) = 45° - m(\sphericalangle CAH) = 45° - m(\sphericalangle CBD) = m(\sphericalangle DBO) \quad (2)$.
În fine, $m(\sphericalangle XDA) = m(\sphericalangle XHA) = 45° = m(\sphericalangle OCB) = m(\sphericalangle ODB) \quad (3)$.
Relaţiile (1), (2) şi (3) ne arată că triunghiurile DOB şi DXA sunt congruente (U.L.U.), deci $DO = DX$.

Remarcă: Pentru demonstrarea congruenţei celor două triunghiuri se putea folosi şi criteriul L.U.L. demonstrând că $AX = BO = R$, raza cercului circumscris. Se ştie că $AH = 2R\cos A = R\sqrt{2}$, iar din triunghiul dreptunghic isoscel AXH rezultă imediat că $AX = R$.



[1] Deoarece triunghiul ABC este ascuţitunghic, $m(\sphericalangle ACB) = 135° - m(\sphericalangle ABC) > 135° - 90° = 45° = m(\sphericalangle OCB)$, ordinea punctelor pe cerc este într-adevăr B, O, D, C.

Soluţia 2: (*Radu Lecoiu*)
Deoarece $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC) = 90° = m(\sphericalangle BDC)$, patrulaterul $BODC$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle ADO) = m(\sphericalangle OBC) = 45°$.
Şi patrulaterul $AHDX$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle ADX) = m(\sphericalangle AHX) = 45°$. În plus, $m(\sphericalangle XAD) = 45° - m(\sphericalangle HAD) = m(\sphericalangle BCA) - 45° = m(\sphericalangle OCD) = m(\sphericalangle OAD)$. Rezultă că triunghiurile ADX şi ADO sunt congruente U.L.U., de unde concluzia.

Soluţia 3: (*Lucia Rîşnoveanu*)
$AD = DB$ şi $AO = OB$ arată că DO este mediatoare, deci bisectoare în triunghiul ADB. Rezultă $m(\sphericalangle ADO) = m(\sphericalangle BDO) = 45°$. Avem şi $m(\sphericalangle ADX) = m(\sphericalangle AHX) = 45°$. Atunci semidreapta opusă lui $(DX$ este bisectoare în triunghiul isoscel HDC, deci este mediatoarea segmentului $[HC]$. Deducem că $XA = XH = XC$ şi, cum $OA = OC$, OX este mediatoarea lui $[AC]$. Cum $m(\sphericalangle XDA) = m(\sphericalangle ODA) = 45°$, rezultă că triunghiul XDO este isoscel cu $DX = DO$.

Altă idee: Avem $AX = CO = R$ (vezi Remarca) şi $\sphericalangle XAD \equiv \sphericalangle OCD$ (ca în soluţiile 1 şi 2). Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci triunghiurile XAM şi OCM sunt congruente L.U.L., deci $MX = MO$ şi $m(\sphericalangle XMA) = m(\sphericalangle OMC) = 90°$, ceea ce arată că X este simetricul lui O faţă de AC, adică AC este mediatoarea lui $[OX]$. Se vede acum că D este un punct (cu nimic special) al acestei mediatoare, deci $DX = DO$.

Şi încă una: Dacă U este mijlocul lui $[AH]$, iar V este mijlocul lui $[BC]$, se ştie că $AUVO$ este paralelogram. Apoi $XU \parallel CV$ (perpendiculare pe AH) şi $XU = AH/2 = BC/2 = CV$ (se ştie şi se arată uşor că dacă $m(\sphericalangle A) = 45°$ atunci $AH = BC$). Rezultă că şi $UVCX$ este paralelogram. Aşadar segmentele $[AO]$, $[UV]$ şi $[XC]$ sunt paralele şi congruente, deci $AOCX$ este paralelogram. Cum $AO = CO$, $AOCX$ este romb, deci AC este mediatoarea lui $[XO]$, de unde concluzia.

Observaţie: Se poate arăta uşor că şi $BHXO$ este paralelogram.

Remarcă: (*Mihai Miculiţa*)
Confguraţia cu $m(\sphericalangle A) = 45°$ are multe proprietăţi interesante:
$OD = BE$, $OE = CD$, iar O este ortocentrul triunghiului ADE.

Puteţi consulta şi soluţia oficială.

Problem of the week no. 116
In the acute triangle ABC, with $\angle A = 45°$, points O and H are the circumcenter and the orthocenter, respectively, and D is the foot of the altitude from B. Point X is the midpoint of the arc AH of the circumcircle of triangle ADH that contains D. Prove that $DX = DO$.

Fatemeh Sajadi, Iran Geometry Olympiad 2018, advanced level, problem 2

An English solution can be found on the website of the competition.