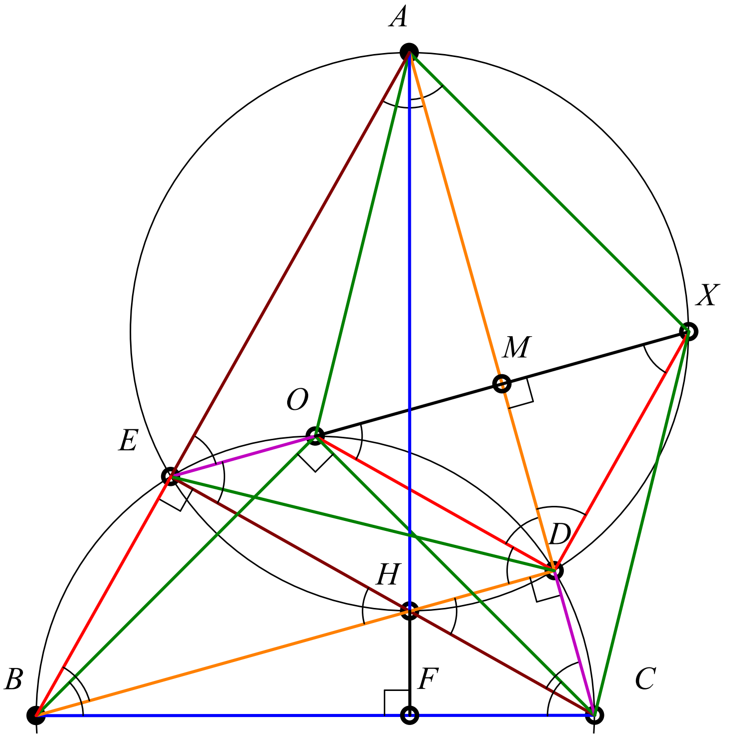
Problema săptămânii 116:

> **În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $m\left(\widehat{BAC}\right)=45^0$, notăm cu O şi H centrul cercului circumscris şi respectiv ortocentrul său; iar cu $D-$ piciorul înălţimii duse din vârful B şi cu $X-$ mijlocul arcului $\widehat{ADX}$, al cercului circumscris triunghiului ADX.**
> **Arătaţi că:** $[DX]\equiv[DO]$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): $\widehat{BOC}-$ fiind un unghi la centru şi $\widehat{BAC}-$ un unghi înscris în cercul circumscris triunghiului ABC, avem:

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{BOC}\right)=2\cdot m\left(\widehat{BAC}\right)=2\cdot 45^0=90^0;\ (1) \\ [OB]\equiv[OC] \end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\widehat{OBC}\right)=m\left(\widehat{BCO}\right)=45^0. \quad (2)$$

Notând acum cu $E-$ piciorul înălţimii duse din vârful C al triunghiului ABC, avem:

$$\left.\begin{array}{r} BD\perp AC \\ CE\perp AB \end{array}\right\}\Rightarrow AEHD-inscriptibil\Rightarrow E\in\odot ADH. \quad (3)$$

În mod analog, obţinem că:

$$\left.\begin{array}{r} BD\perp AC \\ CE\perp AB \\ OB\perp OC;(1) \end{array}\right\}\Rightarrow BCDOE-inscriptibil. \quad (4)$$

Voi redefini punctul $X-$ ca fiind cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei OE, cu cercul circumscris patrulaterului $AEHD$. Întrucât:

$$\left.\begin{array}{r} [EO]=[EO] \\ \left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{BAC}\right)=45^0 \\ CE\perp AB \end{array}\right\}\Rightarrow [EA]\equiv[EC] \\ [OA]\equiv[OC] \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta OEA\equiv\Delta OEC\left(LLL\right)\Rightarrow \widehat{XEA}\equiv\widehat{XEB}\Rightarrow \boxed{\widehat{XA}\equiv\widehat{XH}}, \quad (5)$$

relaţia (5), ne arată că punctul nostru $X -$ coincide cu punctul care poartă acelaşi nume din ipoteza problemei.

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r} EADX - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OXD}\right) = m\left(\widehat{EAD}\right) = 45^0 \\ BD \perp AC \Rightarrow m\left(\widehat{\underline{ABD}}\right) = 90^0 - m\left(\widehat{BAC}\right) = 45^0 \\ OEBD - inscriptibil; (4) \Rightarrow \widehat{XOD} \equiv \widehat{\underline{ABD}} \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{OXD}\right) = m\left(\widehat{XOD}\right) = 45^0; (6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[OD] \equiv [XD]}. \blacksquare$$

OBSERVAŢII: Configuraţia problemei mai are şi următoarele proprietăţi:

1). $\Delta DXO - este\ un\ triunghi\ dreptunghic\ şi\ isoscel\ cu\ vârful\ în\ D$ (consecinţă a relaţiei (6));

2). $AOCX - este\ romb \Leftrightarrow [AO] \equiv [OC] \equiv [CX] \equiv [AX]$; $XEBD - este\ un\ paralelogram$; iar patrulatrele: $OEBD$ şi $OECD -$ sunt nişte trapeze isoscele, aşa că avem:

$$[OE] \equiv [CD]; \quad [ED] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OA] \text{ şi } [OD] \equiv [BE].$$

3). $\Delta AEH \equiv \Delta CEB \Rightarrow [AH] \equiv [BC]$; **4).** $O - este\ ortocentrul\ \Delta AED.$