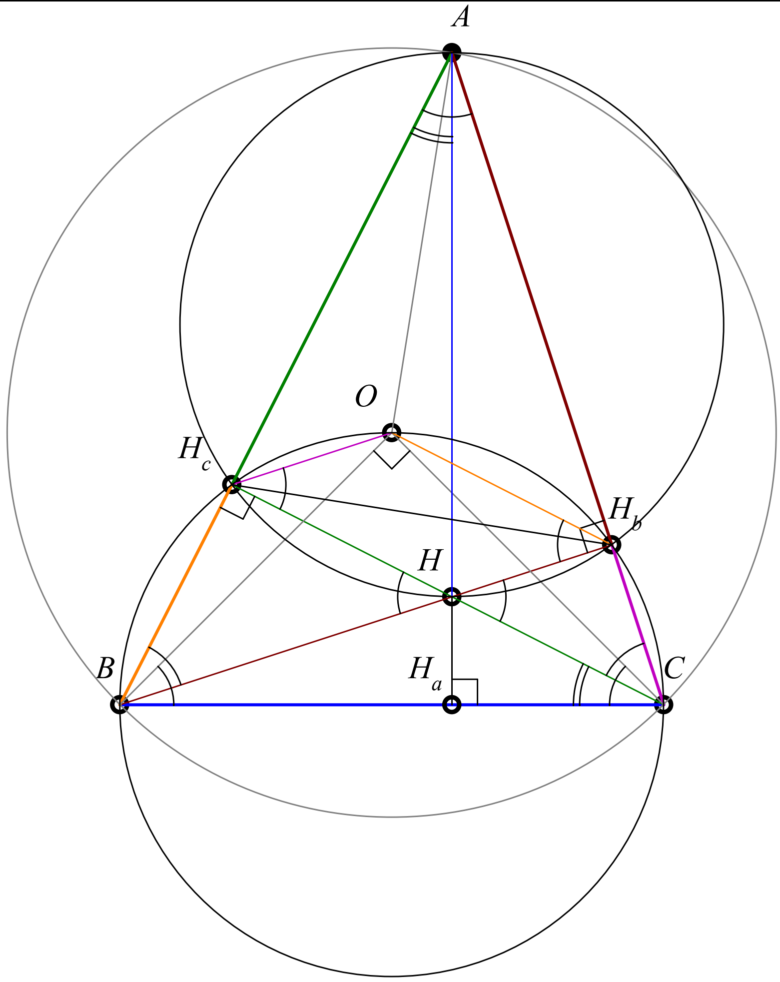
PROPRIETĂŢI ale TRIUNGHIULUI ASCUŢITUNGHIC cu un UNGHI de 45^0

(în legătură cu problema săptămânii 116)

Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, cu $m\left(\widehat{BAC}\right)=45^0$, notăm cu O şi H – centrul cercului circumscris şi ortocentrul; iar cu H_a, H_b şi H_c – picioarele înălţimilor sale.
Arătaţi că: *i*). $[AH]\equiv[BC]$; *ii*). $[OH_b]\equiv[BH_c]$ şi $[OH_c]\equiv[CH_b]$;
***iii*). O – este ortocentrul ΔAH_cH_b.**



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

***i*).** Avem:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}CH_c\perp AB\\ m\left(\widehat{BAC}\right)=45^0\end{array}\right\}\Rightarrow [AH_c]\equiv[CH_c];(1)\\ \left.\begin{array}{r}CH_c\perp AB\\ AH_a\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{HAH_c}\equiv\widehat{BCH_c}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta HAH_c\equiv\Delta BCH_c(CU)\Rightarrow\boxed{[AH]\equiv[BC]}.$$

***ii*).** $\widehat{BOC}$ – fiind un unghi la centru şi $\widehat{BAC}$ – un unghi înscris în cercul circumscris triunghiului ABC, avem:

$$\left.\begin{array}{r}m\left(\widehat{BOC}\right)=2\cdot m\left(\widehat{BAC}\right)=2\cdot45^0=90^0;(2)\\ [OB]\equiv[OC]\end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\widehat{OBC}\right)=m\left(\widehat{BCO}\right)=45^0.\quad(3)$$

Aşa că din: $m\left(\widehat{BOC}\right)=m\left(\widehat{BH_bC}\right)=m\left(\widehat{BH_cC}\right)=90^0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} OH_cBC - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{OH_cC}\right) = m\left(\widehat{OBC}\right) = 45^0 \\ OBCH_b - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{BH_bO}\right) = m\left(\widehat{BCO}\right) = 45^0 \\ AH_bHH_c - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{BHH_c}\right) = m\left(\widehat{H_bHC}\right) = m\left(\widehat{BAC}\right) = 45^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \widehat{OH_cC} \equiv \widehat{H_bHC} \Rightarrow OH_c \parallel BH_b; \quad (4) \\ \widehat{BHH_c} \equiv \widehat{BH_bO} \Rightarrow OH_b \parallel H_cC. \quad (5) \end{cases}$$

Pe de altă parte, din: $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{BH_bC}\right) = m\left(\widehat{BH_cC}\right) = 90^0 \Rightarrow OH_cBCH_b - inscriptibil \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases} OH_cBH_b - inscriptibil; \ (6) \\ OH_cCH_b - inscriptibil. \quad (7) \end{cases}$$

Din relaţiile (4) şi (6), obţinem că: $\boxed{[OH_b] \equiv [BH_c]}$; iar din relaţiile (5) şi (7), că: $\boxed{[OH_c] \equiv [CH_b]}$.

***iii*). Din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} OH_c \parallel BH_b; (4) \\ BH_b \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow OH_c \perp AC. \quad (8)$$

În mod analog arătăm că: $OH_b \perp AB. \quad (9)$

În fine, ţinând seama de relaţiile (8) şi (9) $\Rightarrow$ punctul $O \in OH_b, OH_b,$ este ortocentrul ΔAH_bH_c. ■