Problema săptămânii 114
Juriul unei Olimpiade are la început 30 de membri. Fiecare membru al comisiei crede că unii dintre colegii săi sunt competenţi, în vreme ce alţii nu sunt, iar aceste opinii nu se schimbă. La începutul fiecărei sesiuni are loc un vot, iar acei membri care sunt consideraţi a nu fi competenţi de către mai mult de jumătate din numărul de votanţi sunt excluşi din juriu pentru restul Olimpiadei. Demonstraţi că după cel mult 15 sesiuni nu se vor mai face excluderi. (Desigur, nimeni nu îşi exprimă părerea cu privire la propria sa competenţă.)

Baltic Way, 1996

Soluţie:
Vom demonstra prin inducţie tare după n afirmaţia mai generală:

$P(n)$: Dacă juriul are $2n$ membri, după n sesiuni nu se vor mai face excluderi.

Pentru $n = 1$: nimeni nu poate avea două voturi împotrivă, deci nu se pot face excluderi.
Presupunem afirmaţiile $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(n-1)$ adevărate şi demonstrăm $P(n)$.
• Dacă în prima sesiune sunt excluşi $2k$ membri, conform $P(2n-2k)$, după cel mult $n-k$ alte sesiuni nu se mai fac excluderi, deci în total, după cel mult $n-k+1 \leq n$ sesiuni nu se mai fac excluderi.
• Dacă în prima sesiune sunt excluşi $2k+1$ membri, distingem două cazuri: dacă în fiecare din sesiunile următoare sunt excluşi cel puţin 2 membri, atunci după n sesiuni rămâne cel mult un membru în juriu, iar acesta nu va putea fi exclus, deci după cel mult n sesiuni nu se mai fac excluderi.
Dacă există o sesiune (alta decât prima) în care este exclus un singur membru, ne uităm la următoarea sesiune (după prima) în care au fost excluşi un număr impar de membri. Fie aceasta sesiunea j. Dacă în prima sesiune şi în sesiunea j au fost excluşi, în total, cel puţin 4 membri, atunci în primele j sesiuni au fost excluşi cel puţin $4 + 2(j-2) = 2j$ membri, iar numărul membrilor rămaşi este par. Din ipoteza de inducţie, după cel mult $n-j$ sesiuni nu se mai fac excluderi, deci în total, după cel mult n sesiuni nu se mai fac excluderi.
Dacă şi în sesiunea 1 şi în sesiunea j a fost exclus câte un singur membru, atunci în sesiunea j au votat un număr impar de membri, să zicem $2k+1$, deci persoana exclusă a fost singura care era considerată incompetentă de $k+1$ dintre membrii rămaşi. Dar atunci la sesiunea următoare, cei $2k$ membri rămaşi nu mai au pe cine exclude: nu a rămas nimeni cu $k+1$ voturi împotrivă (trebuie tot $k+1$ voturi pentru a exclude pe cineva). Aşa încât nu se mai pot face excluderi.

Remarcă: Jocul eliminărilor poate dura cel mult n sesiuni pentru un juriu format din $2n$ membri. Într-adevăr, dacă notăm membrii cu M_1, M_2, ... , M_{2n}, iar M_1, M_2 şi M_3 îi consideră incompetenţi pe toţi ceilalţi, M_k, pentru $4 \leq k \leq n+1$ îi consideră încompetenţi pe M_{2k-2}, M_{2k-1}, ... , M_{2n}, iar membrii M_k cu $k > n+1$ îi consideră competenţi pe toţi, atunci la prima sesiune este exclus numai M_{2n}, la fiecare din următoarele $n-2$ sesiuni sunt excluşi cei doi membri care au indicele cel mai mare dintre cei rămaşi, iar la sesiunea n sunt excluşi cei 3 membri rămaşi.

Problem of the week no. 114

The jury of an Olympiad has 30 members in the beginning. Each member of the jury thinks that some of his colleagues are competent, while all the others are not, and these opinions do not change. At the beginning of every session a voting takes place, and those members who are not competent in the opinion of more than one half of the voters are excluded from the jury for the rest of the Olympiad. Prove that after at most 15 sessions there will be no more exclusions. (Note that nobody votes about his own competence.)

Baltic Way, 1996

Solution:

We prove by strong induction after n the more general statement:

$P(n)$: If the jury has $2n$ members, after n sessions there wil be no more exclusions.

For $n = 1$: nobody can have 2 votes against him, so there can be no exclusions.
We assue the statements $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(n-1)$ to be true and we prove $P(n)$.
• If in the first session $2k$ members are excluded, according to $P(2n-2k)$, after at most $n-k$ other sessions there will be no more exclusions, hence, in total, after at most $n-k+1 \leq n$ sessions there will be no more exclusions.
• If in the first session $2k+1$ members are excluded, we distinguish two cases: if in each subsequent session at least two members are excluded, then, after n sessions there is at most one member remaining in the jury, so there can be no more exclusions.

If there is a session (other than the first one) in which a single member of the jury is excluded, we look at the first of the sessions (excluding the first one) in which an odd number of members have been excluded. Call this session j. If in session 1 and session have been excluded, in total, at least 4 members, then in the first j sessions have been excluded at least $4+2(j-2) = 2j$ members, and the number of the remaining ones is even. From the inductive hypothesis it follows that after at most $n-j$ further sessions there will be no more exclusions, hence after at most n sessions in total there will be no more exclusions.

If in both session 1 and session j a single member has been excluded, then in session j there has been an odd number of votes, say $2k+1$, which means that the member that has been excluded has been considered to be incompetent by $k+1$ of the remaining members. But then, in the next session, the $2k$ remaining members can not exclude anyone: all those that had $k+1$ votes against them have been excluded in the previous session (one still needs $k+1$ votes to exclude someone). Thus, there are no more exclusions possible.

Remark: For a jury consisting of $2n$ members, there can be exclusions for at most n sessions. Indeed, if we denote the members by M_1, M_2, ... , M_{2n}, and M_1, M_2 and M_3 consider everybody incompetent, M_k, for $4 \leq k \leq n+1$ considers incompetent M_{2k-2}, M_{2k-1}, ... , M_{2n}, while M_k with $k > n+1$ consider everybody competent, then in the first session only M_{2n} is excluded, in each of the following $n-2$ sessions the two members with the largest indexes are excluded, while in session n the last three members are excluded.