Problema săptămânii 113
Determinaţi numerele reale nenegative a, b, c, d care satisfac simultan relaţiile:

$$a+b+c+d=4 \quad \text{şi}$$

$$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=1.$$

Concursul KöMaL, septembrie 2018

Soluţia 1: (*Catinca Alexandru, Lucia Rîşnoveanu, Bianca Pitu*)
Să observăm mai întâi că dacă vreunul din numere este 0, atunci una dintre fracţiile din membrul stâng este 1, deci egalitatea a doua nu poate avea loc. Aşadar, $a, b, c, d > 0$.
Fie $p = abcd$. Dacă $p < 1$, avem că
$1=\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=$
$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{a}{a+ab+abc+p}+\frac{ab}{ab+abc+p+ap}+\frac{abc}{abc+p+pa+pab}>$
$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{a}{1+a+ab+abc}+\frac{ab}{1+a+ab+abc}+\frac{abc}{1+a+ab+abc}=1,$
contradicţie. Similar se ajunge la contradicţie dacă $p > 1$. (De fapt, din inegalitatea mediilor, $4 = a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$, rezultă că $p > 1$ nu este posibil.)
Rezultă că $p = 1$. Atunci $a, b, c, d > 0$ şi $\sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4} = 1$, deci avem egalitate în inegalitatea mediilor. Deducem că numerele sunt egale, anume $a = b = c = d = 1$. Aceste numere satisfac într-adevăr condiţile din enunţ.

Remarcă: Această problemă este strâns legată de următoarea:
Dacă $a, b, c, d > 0$ au produsul 1, atunci:

$$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=1,$$

$$\frac{a}{1+a+ab+abc}+\frac{b}{1+b+bc+bcd}+\frac{c}{1+c+cd+cda}+\frac{d}{1+d+da+dab}=1,$$

$$\frac{ab}{1+a+ab+abc}+\frac{bc}{1+b+bc+bcd}+\frac{cd}{1+c+cd+cda}+\frac{da}{1+d+da+dab}=1,$$

$$\frac{abc}{1+a+ab+abc}+\frac{bcd}{1+b+bc+bcd}+\frac{cda}{1+c+cd+cda}+\frac{dab}{1+d+da+dab}=1.$$

Am exemplificat relaţiile pentru 4 variabile, dar pot fi oricâte (minim două).
Demonstraţia acestor identităţi se poate face fie amplificând convenabil astfel încât să se obţină numitorul comun $1 + a + ab + abc$ (fracţia a doua cu a, a treia cu ab, iar ultima cu abc), fie decondiţionând, adică punând $a = x/y$, $b = y/z$, $c = z/t$, $d = t/x$, caz în care se obţine numitorul comun $x + y + z + t$.

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel, Radu Lecoiu*)
Din inegalitatea CBS forma Engel (inegalitatea lui Titu), avem

$$1 = \frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} \geq$$

$$\frac{(1+1+1+1)^2}{4+\sum\limits_{cycl} a + \sum\limits_{cycl} ab + \sum\limits_{cycl} abc}. \qquad (1)$$

Vom arăta că

$$4+\sum_{cycl} a + \sum_{cycl} ab + \sum_{cycl} abc \leq 16. \qquad (2)$$

Avem $a+b+c+d=4$ şi $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d) \leq \left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2 = 4.$
De asemenea:
(David Andrei Anghel):
$abc+bcd+cda+dab = ab(c+d)+cd(a+b) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d)+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2(a+b) =$
$\frac{(a+b)(c+d)}{4}\cdot(a+b+c+d) = (a+b)(c+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 4.$
(Radu Lecoiu):
Din inegalitatea lui Maclaurin avem

$$1 = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}},$$

deci $abc+bcd+cda+dab \leq 4$.
Prin adunarea acestor relaţii obţinem inegalitatea (2). Din (1) şi (2) rezultă că avem egalitatea în (2), lucru care se întâmplă numai dacă $a=b=c=d$. Din $a+b+c+d=4$ rezultă atunci $a=b=c=d=1$, numere care satisfac într-adevăr condiţiile din enunţ.

Problem of the week no. 113
Determine the non-negative real numbers a, b, c, d that satisfy:

$$a+b+c+d=4 \text{ and}$$

$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1.$$

KöMaL Competition, september 2018

Solution 1:
Note that none of the numbers can be 0, otherwise the second condition is not

fulfilled. Put $p = abcd$. If $p < 1$, then

$$1 = \frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} =$$
$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{a}{a+ab+abc+p} + \frac{ab}{ab+abc+p+ap} + \frac{abc}{abc+p+pa+pab} >$$
$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{a}{1+a+ab+abc} + \frac{ab}{1+a+ab+abc} + \frac{abc}{1+a+ab+abc} = 1,$$

which is a contradiction. Similarly one obtains a contradiction in the case when $p > 1$. The only remaining case is $p = 1$.

We have $a, b, c, d > 0$ and $\sqrt[4]{abcd} = \dfrac{a+b+c+d}{4} = 1$, hence we have equality in the AM-GM inequality. It follows that the numbers must be equal, namely $a = b = c = d = 1$. These numbers do indeed satisfy the given conditions.

Remark: This problem is connected with the following one:
If $a, b, c, d > 0$ satisfy $abcd = 1$, then:

$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1,$$

$$\frac{a}{1+a+ab+abc} + \frac{b}{1+b+bc+bcd} + \frac{c}{1+c+cd+cda} + \frac{d}{1+d+da+dab} = 1,$$
$$\frac{ab}{1+a+ab+abc} + \frac{bc}{1+b+bc+bcd} + \frac{cd}{1+c+cd+cda} + \frac{da}{1+d+da+dab} = 1,$$
$$\frac{abc}{1+a+ab+abc} + \frac{bcd}{1+b+bc+bcd} + \frac{cda}{1+c+cd+cda} + \frac{dab}{1+d+da+dab} = 1.$$

These identities can be extended to any number of variables (at least two).

Solution 2:
From Titu's Lemma we have

$$1 = \frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} \geq$$
$$\frac{(1+1+1+1)^2}{4 + \sum_{cycl} a + \sum_{cycl} ab + \sum_{cycl} abc}. \qquad (1)$$

We show that

$$4 + \sum_{cycl} a + \sum_{cycl} ab + \sum_{cycl} abc \leq 16. \qquad (2)$$

We have $a+b+c+d = 4$ and $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \left(\dfrac{a+c+b+d}{2}\right)^2 = 4$.
Also:

$abc+bcd+cda+dab = ab(c+d)+cd(a+b) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (c+d)+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 (a+b) =$
$\frac{(a+b)(c+d)}{4} \cdot (a+b+c+d) = (a+b)(c+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 4.$
This last inequality is a direct consequence of Maclaurin's inequality. Indeed,

$$1 = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}},$$

which proves $abc+bcd+cda+dab \leq 4$.
Adding these inequalities yields (2). From (1) and (2) it follows that (2) is satisfied with equality, which happens only if $a = b = c = d$. From $a+b+c+d = 4$ we get that $a = b = c = d = 1$, numbers that do indeed satisfy the given conditions.