Problema săptămânii 112

Fie ω_1 şi ω_2 două cercuri de centre O_1, respectiv O_2. Aceste două cercuri se intersectează în A şi B. Dreapta O_1B intersectează a doua oară cercul ω_2 în punctul C, iar dreapta O_2A intersectează a doua oară cercul ω_1 în punctul D. Fie X al doilea punct de intersecţie a lui AC cu ω_1 şi Y al doilea punct de intersecţie a lui BD cu ω_2. Demonstraţi că $CX = DY$.

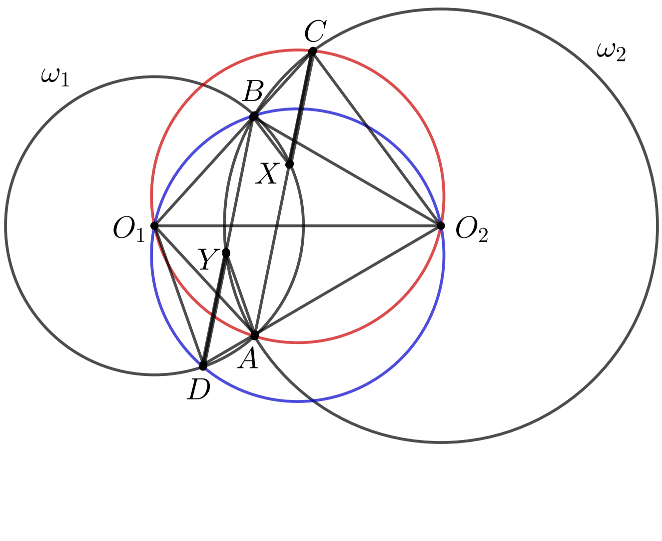
Alireza Dadgarnia, Iranian Geometry Olympiad, 2018

Soluţie:

Fie $\alpha = m(\sphericalangle AO_1O_2) = m(\sphericalangle BO_1O_2)$ şi $\beta = m(\sphericalangle AO_2O_1) = m(\sphericalangle BO_2O_1)$. Triunghiul O_1AD este isoscel, deci unghiul $\sphericalangle O_1AD$ este ascuţit. Rezultă că dacă $\alpha + \beta < 90°$, atunci $A \in (O_2D)$ şi, analog, $B \in (O_1C)$, iar dacă $\alpha + \beta > 90°$, atunci $C \in (O_1B)$ şi $D \in (O_2A)$. Vom trata numai primul caz, cel de-al doilea fiind analog.

Avem că $m(\sphericalangle O_1AO_2) = 180° - \alpha - \beta$ şi $m(\sphericalangle O_2CB) = m(\sphericalangle O_2BC) = \alpha + \beta$, deci patrulaterul AO_1CO_2 este inscriptibil. Analog se arată că şi patrulaterul BO_1DO_2 este inscriptibil.

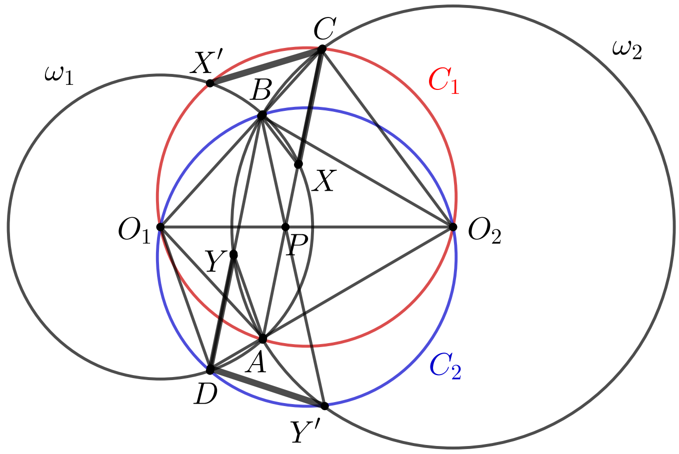
Atunci $m(\sphericalangle BDO_2) = m(\sphericalangle BO_1O_2) = \alpha = m(\sphericalangle CO_1O_2) = m(\sphericalangle CAO_2)$, de unde rezultă că dreptele AC şi BD sunt paralele. Prin urmare, $AYBC$ şi $AXBD$ sunt trapeze isoscele, de unde rezultă imediat că triunghiurile AYD şi BCX sunt congruente, ceea ce implică $CX = DY$.



Remarcă: Se poate justifica şi altfel inscriptibilitatea patrulaterului AO_1CO_2: se ştie că într-un triunghi neisoscel, bisectoarea unui vârf şi mediatoarea laturii opuse se intersectează pe cercul circumscris triunghiului. Cum (O_1O_2 este bisectoarea unghiului AO_1C şi $O_2A = O_2C$ (raze în cercul ω_2), punctul O_2 aparţine bisectoarei din O_1 şi mediatoarei lui $[AC]$, deci se află pe cercul circumscris triunghiului AO_1C.

Altă idee: (*Catinca Alexandru*)
Se arată uşor că $DX \parallel YC$, apoi, ca mai sus, că $AC \parallel BD$. Atunci $DXCY$ este paralelogram, deci $DY = CX$.

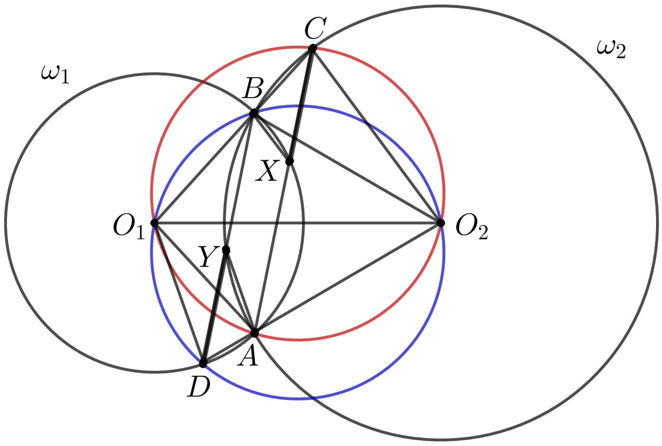
Remarcă: (*David Andrei Anghel*)
Se poate arăta că dacă C_1 şi C_2 sunt cercurile circumscrise patrulaterelor AO_1CO_2, respectiv BO_1DO_2, şi notăm $C_1 \cap \omega_1 = \{A, X'\}$, $C_2 \cap \omega_2 = \{B, Y'\}$, atunci $CX' = CX$ şi $DY' = DY$. Cum CX' şi DY' sunt simetrice faţă de O_1O_2, ele sunt congruente, de unde rezultă concluzia.



Problem of the week no. 112
Let ω_1 and ω_2 be two circles with centers O_1 and O_2, respectively. These two circles intersect each other at points A and B. Line O_1B intersects ω_2 for the second time at point C, and line O_2A intersects ω_1 for the second time at point D. Let X be the second intersection of AC and ω_1. Also Y is the second intersection point of BD and ω_2. Prove that $CX = DY$.

Alireza Dadgarnia, Iranian Geometry Olympiad, 2018

Solution:
Let $\alpha = \sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle BO_1O_2$ and $\beta = \sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle BO_2O_1$. Triangle O_1AD is isosceles, hence $\sphericalangle O_1AD$ is acute. Thus, if $\alpha + \beta < 90°$, then $A \in (O_2D)$, and, similarly, $B \in (O_1C)$, while in the case $\alpha + \beta > 90°$, we have $C \in (O_1B)$ and $D \in (O_2A)$. We shall only treat the first case, the second one being similar.
We have $O_1AO_2 = 180° - \alpha - \beta$ and $\sphericalangle O_2CB = \sphericalangle O_2BC = \alpha + \beta$, which means that the quadrilateral AO_1CO_2 is cyclic. Similarly it follows that BO_1DO_2 is also cyclic. Hence, $\sphericalangle BDO_2 = \sphericalangle BO_1O_2 = \alpha = \sphericalangle CO_1O_2 = \sphericalangle CAO_2$, which shows that the lines AC and BD are parallel. We obtain that $AYBC$ and $AXBD$ are isosceles trapezoids. Then it is easy to see that triangles AYD are BCX congruent, hence $CX = DY$.


C
ω_2
ω_1
B
X
O_1
O_2
Y
A
D