Problema săptămânii 111

Pentru un număr natural N, notăm cu p_N cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu N. O mutare constă din înlocuirea numărului N cu numărul $N - p_N$. Repetăm această mutare până când obţinem 0 sau 1. Dacă obţinem 1, numărul iniţial se numeşte bun, iar dacă se ajunge la 0, numărul se numeşte rău. De exemplu, 95 este bun deoarece $95 \to 6 \to 1$. Demonstraţi că cel puţin un sfert şi cel mult o jumătate din numerele de la 1 la 1000000 sunt bune.

Olimpiada Sankt Petersburg, 2010

Soluţie:

Pentru majorare, să remarcăm că dacă n este bun, atunci $n-1$ este rău. Într-adevăr, dacă din n s-au scăzut, pe rând, nişte numere prime şi s-a ajuns la 1, atunci aceleaşi numere prime se vor scădea şi din $n-1$ şi se va ajunge la 0 (din acelaşi număr de paşi). Într-adevăr, dacă din n am putut scădea numărul prim p fără să obţinem 0, atunci îl vom putea scădea şi din $n-1$, iar rezultatul obţinut va fi cu 1 mai mic. Continuând procedeul, vom ajunge să scădem aceleaşi numere prime şi să obţinem 0.

Alternativ, se putea observa că dacă n este bun, atunci $n+1$ este rău. Într-adevăr, fie $n+1$ este prim şi atunci se ajunge direct la 0, fie din $n+1$ se scade acelaşi număr prim ca în cazul lui n şi se obţine un număr cu 1 mai mare. Continuând procedeul, fie cădem pe parcurs peste un număr prim şi atunci ajungem direct la 0, fie efectuăm aceiaşi paşi ca şi pentru n şi ajungem astfel la 2 şi de acolo la 0.

Pentru minorare, arătăm prin inducţie tare după k că, pentru $n = 2k$, printre numerele $1, 2, \ldots, 2k$ avem cel puţin $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ numere bune.

Pentru $k = 1$ afirmaţia este evidentă. Presupunând-o adevărată pentru $1 \le j \le k$, să o demonstrăm pentru $k+1$. Fie p cel mai mare număr prim mai mic decât $2k$. Atunci p este impar, iar printre numerele $1, 2, \ldots, p-1$ sunt cel puţin $\left[\frac{p-1}{4}\right] + 1$ numere bune. Numerele $p, p+1, \ldots, 2k$ vor fi reduse după primul pas la $0, 1, \ldots, 2k-p$. Printre aceste numere sunt cel puţin $\left[\frac{2k-p-1}{4}\right] + 1$ numere bune. Aşadar, avem cel puţin $\left[\frac{p-1}{4}\right] + 1 + \left[\frac{2k-p-1}{4}\right] + 1$ numere bune. Dar, analizând parităţile lui $\frac{p-1}{2}$ şi k (cazul cel mai defavorabil fiind cel cu k par şi $(p-1)/2$ impar) se arată uşor că

$$\left[\frac{p-1}{4}\right] + 1 + \left[\frac{2k-p-1}{4}\right] + 1 \ge \left[\frac{k}{2}\right] + 1,$$

de unde rezultă concluzia.

Problem of the week no. 111
For a positive integer N, let p_N denote the largest prime such that $p_N \leq N$. A move consists of replacing N by $N - p_N$. We repeat this move until we get 0 or 1. If we get 1 then N is called as good„ otherwise it is called bad. For example, 95 is good because $95 \to 6 \to 1$. Prove that at least one quarter and at most one half of the numbers from 1 to 1000000 are good numbers.

Sankt Petersburg Olympiad, 2010, Grade 11, P4

Solution:
For the upper bound, just note that if a positive integer n is good then $n - 1$ is bad. Or, alternatively, that $n + 1$ is bad.
A solution can be found on AoPS.