

Soluții juniori

Problema 1

Să se determine toate perechile de numere naturale (n, m) care verifică simultan condițiile:

i) Numărul n este compus;

ii) Dacă numerele $d_1, d_2, \dots, d_k, k \in \mathbb{N}^*$ sunt toți divizorii proprii ai lui n , atunci numerele $d_1 + 1, d_2 + 1, \dots, d_k + 1$ sunt toți divizorii proprii ai lui m .

Soluție (prof. Cristian Mangra, București):

Răspuns: $(n, m) \in \{(4, 9), (8, 15)\}$

Pentru $k = 1$, obținem $n = p^2$, unde p este număr prim. Deducem că $m = (p + 1)^2$, unde $p + 1$ este număr prim. Obținem $p = 2, q = 3$ și perechea $(n, m) = (4, 9)$.

Pentru $k \geq 2$, considerăm $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ toți divizorii proprii ai lui n .

Atunci $n = d_1 d_k = d_2 d_{k-1}$ și $m = (d_1 + 1)(d_k + 1) = (d_2 + 1)(d_{k-1} + 1)$, de unde deducem că

$$d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1}, \text{ adică } d_1 + \frac{n}{d_1} = d_2 + \frac{n}{d_2}, \text{ echivalent cu } (d_1 - d_2) \left(1 - \frac{n}{d_1 d_2} \right) = 0.$$

Prin urmare $n = d_1 d_2$, deci $k = 2$, adică

a) $n = d_1 d_2$, unde d_1 și d_2 sunt numere prime diferite, deci $m = (d_1 + 1)(d_2 + 1)$. Cum $d_1 + 1$ și $d_2 + 1$ sunt trebuie să fie prime diferite, iar $d_2 + 1$ este par, nu avem soluție.

b) $n = d_1^3$, unde d_1 este număr prim, adică $m = (d_1 + 1)(d_1^2 + 1)$ și $d_1 + 1, d_1^2 + 1$ sunt numere prime. Obținem $d_1 = 2$ și perechea $(n, m) = (8, 15)$.

Problema 2

Se consideră un triunghi ABC în interiorul căruia există un punct D astfel încât $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{DBA}) = 60^\circ$. Dacă punctul E este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $F \in (AC)$ astfel încât $AF = 2FC$, demonstrați că $DE \perp EF$.

Soluție:

Fie G mijlocul segmentului $[AF]$ și M mijlocul segmentului $[AC]$. Evident, M este mijlocul segmentului $[GF]$ și $DM \perp AC$. Deoarece $d(F, DM) = MF = \frac{GF}{2} = \frac{CF}{2} = d(F, DC)$, rezultă că $(DF$ este bisectoarea unghiului MDC . Deducem că triunghiul DFG este echilateral.

Deoarece $m(\widehat{DGF}) = m(\widehat{DBA}) = 60^\circ$, rezultă că patrulaterul $ABDG$ este inscripabil. Prin urmare, $m(\widehat{DBG}) = m(\widehat{DAG}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{ABG}) = m(\widehat{GDA}) = 30^\circ$.

Segmentul EF este linie mijlocie în triunghiul CBG , iar segmentul EM este linie mijlocie în triunghiul ABC . Obținem $EF \parallel BG$, respectiv $EM \parallel AB$, deci $m(\widehat{MEF}) = m(\widehat{ABG}) = 30^\circ$.

Cum $m(\widehat{MDF}) = 30^\circ$, rezultă că patrulaterul $DMFE$ este inscriptibil și

$$m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{DMF}) = 90^\circ.$$

Problema 3

Pentru numărul natural nenul n există un număr natural k , $k \geq 2$, și numerele raționale pozitive a_1, a_2, \dots, a_k astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_k = n$. Determinați toate valorile posibile ale numărului n .

Soluție (prof. Cristian Mangra, București):

Răspuns: $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3, 5\}$

- Dacă n este număr compus, $n = pq$, $p > 1, q > 1$, luăm $a_1 = p, a_2 = q$ și $a_3 = a_4 \dots = a_k = 1$, unde $k = n - (p + q)$. Astfel, se verifică $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_k = n$.

- Dacă n este număr prim $n \geq 11$, luăm $a_1 = \frac{n}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 4$ și $a_4 = a_5 = \dots = a_k = 1$, unde $k = \frac{n-3}{2}$. Astfel, se verifică $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_k = n$.

- Dacă $n = 7$, luăm $k = 3$ și $a_1 = \frac{9}{2}, a_2 = \frac{7}{6}, a_3 = \frac{4}{3}$.

Presupunem că există un număr natural n , mai mic sau egal cu 5, care nu este compus și verifică enunțul.

Din inegalitatea mediilor obținem $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$, echivalentă cu $n^{k-1} \geq k^k$.

- Cazurile $n \in \{1, 2\}$ nu convin.

- Dacă $n = 3$, avem $3^{k-1} < k^k$, oricare $k \geq 2$. Nu se verifică $n^{k-1} \geq k^k$.

- Dacă $n = 5$, avem $5^{k-1} < k^k$, oricare $k \geq 3$. Nu se verifică $n^{k-1} \geq k^k$.

Pentru $k = 2$, obținem $a_1 + a_2 = a_1 a_2 = 5$, care nu se verifică pentru numere raționale.

Problema 4

Fie M mulțimea numerelor naturale impare. Pentru orice număr natural nenul n , notăm cu $A(n)$ numărul submulțimilor lui M care au suma elementelor egală cu n . (De exemplu, $A(9) = 2$ deoarece singurele submulțimi ale lui M care au suma elementelor egală cu 9 sunt $\{9\}$ și $\{1, 3, 5\}$).

a) Arătați că $A(n) \leq A(n+1)$ pentru oricare număr natural n , $n \geq 2$;

b) Determinați numerele naturale n , $n \geq 2$ pentru care $A(n) = A(n+1)$.

Soluție (lector dr. Andrei Eckstein, Timișoara):

a) Vom indica un procedeu prin care, fiecărei submulțimi a lui M care are suma

elementelor egală cu n îi punem în corespondență câte o submulțime a lui M care are suma elementelor $n+1$, astfel încât, la două submulțimi diferite cu suma elementelor egală cu n , să le corespundă două submulțimi diferite cu suma elementelor egală cu $n+1$.

- Dintr-o submulțime care nu îl conține pe 1 și are suma elementelor egală cu n , adăugându-l pe 1, obținem o submulțime cu suma elementelor $n+1$ care îl conține pe 1.

- Dintr-o submulțime care îl conține pe 1 și are suma elementelor n obținem o submulțime cu suma elementelor $n+1$ astfel: îl eliminăm pe 1 și pe cel mai mare element al mulțimii, fie acesta $2k-1$, cu $k \in \mathbb{N}, (k \geq 2)$ și introducem în submulțime elementul $2k+1$.

Procedeul descris mai sus asociază la două submulțimi diferite cu suma elementelor egală cu n două submulțimi diferite cu suma elementelor egală cu $n+1$. Rezultă că $A(n) \leq A(n+1)$, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) Dacă $n \geq 3$, obținem, prin procedeul de mai sus, orice submulțime cu suma elementelor $n+1$ care îl conține pe 1 și orice submulțime care nu îl conține pe 1 și care are proprietatea că, dacă cel mai mare element al ei este $2k+1$, atunci $2k-1$ nu face parte din submulțime.

- Dacă $n = 4k$, mulțimea $\{5, 2k-3, 2k-1\}$ nu provine din cele numărate la $A(n)$, deci

$A(n) < A(n+1)$ pentru orice $n = 4k$ cu $2k-3 \geq 7$, adică $n \geq 20$.

Dacă $n = 4k-1$, submulțimea $\{2k-1, 2k+1\}$ nu se obține din submulțimile numărate la $A(n)$ pentru $k \geq 2$, adică $n \geq 7$.

Dacă $n = 4k+1$, submulțimea $\{3, 7, 2k-5, 2k-3\}$, $k \geq 7$, nu se obține prin procedeul indicat din niciuna din submulțimile numărate la $A(n)$, adică pentru $n \geq 29$ nu putem avea egalitatea dorită.

Dacă $n = 4k+2$, submulțimea $\{3, 2k-1, 2k+1\}$ nu se obține din submulțimile care au suma elementelor egală cu n pentru $k \geq 3$, adică pentru $n \geq 14$.

Deci, putem avea $A(n) = A(n+1)$ cel mult pentru 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 21, 25.

Avem, prin calcul:

$$A(2) = 0,$$

$$A(3) = 1 = A(4) = A(5) = A(6) = A(7),$$

$$A(8) = A(9) = 2 = A(10) = A(11),$$

$$A(12) = A(13) = A(14) = 3,$$

$$A(16) = A(17) = A(18) = 5,$$

$$A(21) = A(22) = 8,$$

și $A(25) = A(26) = 12$.

Prin urmare, avem egalitate pentru toate numerele din lista de mai sus cu excepția lui 2.