CONCURSUL INTERNAŢIONAL „MATHEMATICAL DANUBE COMPETITION”

Ediția a XIV - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Juniori

Problema 1

Să se determine toate perechile de numere naturale (n,m) care verifică simultan condiţiile:
i) Numărul *n* este compus;
ii) Dacă numerele $d_1, d_2, ..., d_k, k \in \mathbb{N}^*$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *n*, atunci numerele $d_1+1, d_2+1, ..., d_k+1$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *m*.

Problema 2

Se consideră un triunghi *ABC* în interiorul căruia există un punct *D* astfel încât $m(DAC) = m(DCA) = 30^\circ$ şi $m(DBA) = 60^\circ$. Dacă punctul *E* este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $F \in (AC)$ astfel încât $AF = 2FC$, demonstraţi că $DE \perp EF$.

Problema 3

Pentru numărul natural nenul *n* există un număr natural k, $k \geq 2$, şi numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, ..., a_k$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k = n$. Determinaţi toate valorile posibile ale numărului *n*.

Problema 4

Fie *M* mulţimea numerelor naturale impare. Pentru orice număr natural nenul *n*, notăm cu $A(n)$ numărul submulţimilor lui *M* care au suma elementelor egală cu *n*. (De exemplu, $A(9) = 2$ deoarece singurele submulţimi ale lui *M* care au suma elementelor egală cu 9 sunt $\{9\}$ şi $\{1,3,5\}$) .

a) Arătaţi că $A(n) \leq A(n+1)$ pentru oricare număr natural *n*, $n \geq 2$;

b) Determinaţi numerele naturale *n*, $n \geq 2$, pentru care $A(n) = A(n+1)$.