Problema săptămânii 110
Avem două grămezi conţinând 2000, respectiv 2018 monede. Ana şi Bogdan mută alternativ astfel: jucătorul aflat la mutare ia t monede dintr-o grămadă are conţine cel puţin două monede, unde $t \in \{2, 3, 4\}$, şi adaugă o monedă la cealaltă grămadă. Jucătorii pot alege un alt t şi o altă grămadă la fiecare mutare a lor, iar jucătorul care nu poate muta pierde. Dacă Ana mută prima, determinaţi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare.

baraj de juniori, Cipru, 2018

Soluţia oficială:
Notăm cu A_n numărul de monede rămase în prima grămadă după cea de-a n-a mutare şi cu B_n numărul de monede rămase în cea de-a doua grămadă după mutarea a n-a. Vom spune că o distribuţie de monede (o poziţie) este *pierzătoare* dacă $A_n - B_n \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$ şi că este *câştigătoare* dacă $A_n - B_n \equiv 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 8$.

Lema 1: Dacă urmăm la mutare într-o poziţie câştigătoare, atunci avem la dispoziţie o mutare care să lase adversarul într-o poziţie pierzătoare.
Demonstraţie: Deoarece mulţimea $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ este simetrică modulo 8, putem presupune că $A_n \geq B_n$. Atunci $A_n = B_n + 8k + \ell$ pentru un $k \in \mathbb{N}$ şi $\ell \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $\ell = 2, 3, 4$, atunci luăm 2 monede din prima grămadă şi adăugăm una la cea de-a doua grămadă. Dacă $\ell = 5, 6$, atunci luăm 4 monede din prima grămadă şi adăugăm una la cea de-a doua grămadă. În orice caz se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$.

Lema 2: Dacă urmăm la mutare într-o poziţie pierzătoare, atunci fie nu mai avem nicio mutare disponibilă, fie, dacă avem, atunci orice mutare am face, ea îl lasă pe adversar într-o poziţie câştigătoare.
Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea, vom presupune ca se iau monede din prima grămadă (dacă se poate). Să examinăm valorile lui $A_{n+1} - B_{n+1}$ în funcţie de $A_n - B_n$ şi posibilele mutări:
• Dacă $A_n - B_n \equiv 0 \pmod 8$, luând 2, 3 sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 5, 4, 3 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.
• Dacă $A_n - B_n \equiv 1 \pmod 8$, luând 2, 3 sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 6, 5, 4 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.
• Dacă $A_n - B_n \equiv 7 \pmod 8$, luând 2, 3 sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 4, 3, 2 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.
În concluzie, orice am muta, îi vom lăsa adversarului o poziţie câştigătoare.

Deoarece iniţial, diferenţa de monede este $A_0 - B_0 = -18 \equiv 6 \pmod 8$, din lemele 1 şi 2 rezultă că Ana nu pierde: ea poate mereu muta astfel încât să îi lase lui Bogdan o poziţie pierzătoare. Pe de altă parte, jocul se încheie după cel mult 4018 mutări, prin urmare Bogdan va pierde, adică Ana va câştiga.

Comentarii: Jocul poate fi privit ca un joc în care strategia câştigătoare este aceea de a muta simetric. Asta poate fi înţeles (şi făcut) în cel puţin două moduri. La prima ei mutare, Ana ia fie 4 monede din prima grămadă, fie două monede din cea de-a doua. În următoarele mutări, ea poate folosi două strategii simple: fie să ia din cealaltă grămadă la fel de multe monede ca şi Bogdan la precedenta sa mutare, fie, strategia a doua, să ia din aceeaşi grămadă cu Bogdan $6 - k$ monede dacă Bogdan a luat k. Rămân de studiat în final situaţiile în care Ana nu mai poate face aceste mutări. Dacă a optat pentru prima strategie, se va ajunge la una din situaţiile $(0, 16)$, $(1, 17)$, $(2, 18)$ sau $(3, 19)$. Dacă Ana a optat pentru cealaltă strategie, sunt mai multe situaţii de analizat.

Cum poate fi ghicită soluţia oficială? Cu o analiză retrogradă (mers invers) putem analiza poziţiile finale ale jocului. Când avem deja stabilită natura a numeroase poziţii, putem ghici care sunt poziţiile câştigătoare şi care sunt cele pierzătoare. Mai întâi trebuie definită noţiunea de „poziţie": este configuraţia pe care o găsesc când urmez la mutare sau cea pe care o las după mutarea mea? Apoi, odată ghicite cele două mulţimi, despre ele se demonstrează cele două leme, aceleaşi mereu:
1. din orice poziţie câştigătoare există o mutare câştigătoare (care îl lasă pe adversar într-o poziţie pierzătoare)
2. dintr-o poziţie pierzătoare nu poţi ajunge într-o alta pierzătoare (adică nu îi poţi lăsa adversarului tău o poziţie pierzătoare dacă tu te aflai într-una pierzătoare)
Ar mai trebui demonstrat că jocul se termină mereu şi că toate poziţiile sale finale sunt pierzătoare.
Cele două leme oferă strategia câştigătoare: mută în aşa fel încât adversarul tău să se afle mereu în poziţie pierzătoare.

Vă recomand să citiţi capitolul de JOCURI din cartea *Invarianţi şi jocuri*, de Iurie Boreico şi Marcel Teleucă (Editura GIL, 2007) sau cursul meu în limba engleză Games.

Problem of the week no. 110
We have two piles with 2000 and 2018 coins respectively. Anna and Bob take alternate turns making the following moves: The player whose turn is to move picks a pile with at least two coins, removes from that pile t coins for some $2 \leq t \leq 4$, and adds to the other pile 1 coin. The players can, if they wish, choose a different t and a different pile at each turn, and the player who cannot make a move loses. If Anna plays first, determine which player has a winning strategy.

JTST Cyprus, 2018

Official solution :
Let A_n be the number of coins left in the first pile after the n-th move and let B_n be the number of coins left in the second pile after the n-th move. We will call a distribution of coins (a position) *losing* if $A_n - B_n \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$ and *winning*

if $A_n - B_n \equiv 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 8$.

Lemma 1: If one is on move on a winning position, then he has a move that leave his opponent in a losing position.
Proof: The set $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ being symmetrical modulo 8, we may assume $A_n \geq B_n$. Then $A_n = B_n + 8k + \ell$ for some non-negative integer k and $\ell \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. If $\ell = 2, 3, 4$, then one can take two coins from the first pile and add one to the second pile. If $\ell = 5, 6$, then one can take four coins from the first pile and add one coin to the second pile. In both cases one gets to $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$.

Lemma 2: If one is on move on a losing position, then either he has no moves left, or any move he can make leaves his opponent in a winning position.
Proof: Without loss of generality, we may assume that one takes coins from the first pile. Let us examine the values of $A_{n+1} - B_{n+1}$ depending on $A_n - B_n$ and the possible moves:
• If $A_n - B_n \equiv 0 \pmod 8$, taking 2, 3, or 4 coins from the first pile and adding one to the second pile leads to $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 5, 4, 3 \pmod 8$ (respectively) which are all losing positions.
• If $A_n - B_n \equiv 1 \pmod 8$, taking 2, 3, or 4 coins from the first pile and adding one to the second pile leads to $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 6, 5, 4 \pmod 8$ (respectively) which are all losing positions.
• If $A_n - B_n \equiv 7 \pmod 8$, taking 2, 3, or 4 coins from the first pile and adding one to the second pile leads to $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 4, 3, 2 \pmod 8$ (respectively) which are all losing positions.
In conclusion, any move leaves the opponent in a winning position.

Initially, the difference between the number of coins in the two piles is $A_0 - B_0 = -18 \equiv 6 \pmod 8$. From lemmas 1 and 2 it follows that Anna cannot lose because she can always move such that she leaves Bob in a losing position. On the other hand, the game ends in at most 4018 moves, so somebody looses and as Anna does not lose, Bob will loose; Anna wins.

Comment: The game can also be seen as one in which Anna repeats symmetrically Bob's moves. This can be understood (and done) in at least two ways. In her first move, Anna must either take 4 coins from the first pile, or 2 coins from the second one. In all her subsequent moves, she copies Bob's moves by adopting one of the following strategies:
1. she takes the same number of coins as Bob did, but from the other pile
2. if Bob took k coins from one pile, Anna takes $6 - k$ from the same pile.
(Both strategies keep $A_n - B_n$ unchanged.)
In the end, one still needs to study the positions in which Anna can not follow her plan (not enough coins left in her chosen pile). The first strategy always reduces to one of the positions: $(0, 16)$, $(1, 17)$, $(2, 18)$ or $(3, 19)$. For the second one, there is more work to be done.

For more on winning and losing positions read my mini-course Games.