Problema săptămânii 109
Demonstraţi că $x^4 + y^4 + z^4 - 4(x^3 + y^3 + z^3) + 5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 4$, oricare ar fi $x, y, z \geq 0$, cu $x + y + z = 2$. Când are loc egalitatea?

Clara Iurea

Soluţia 1: Avem $a(a-1)^2(a-2) \leq 0$, $\forall\, , a \in [0,2]$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a \in \{0,1,2\}$. Această inegalitate se scrie $a^4 - 4a^3 + 5a^2 \leq 2a$. Scriind-o pentru $a = x$, $a = y$ şi $a = z$ şi adunând cele trei inegalităţi obţinute, folosind condiţia $x + y + z = 2$ (care împreuna cu $x, y, z \geq 0$ implică $x, y, z \in [0, 2]$), obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitate avem dacă $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ au suma 2, adică pentru tripletele $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ şi permutările acestora.
(Cum ajungem să găsim soluţia de mai sus? Ghicim cazurile de egalitate, apoi căutăm o spargere de forma $a^4 - 4a^3 + 5a^2 \leq ma + n$, valabilă pentru orice $a \in [0, 2]$ care să fie satisfăcută cu egalitate dacă $a \in \{0, 1, 2\}$.)

Soluţia 2: (omogenizare)
Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$x^4+y^4+z^4-4(x^3+y^3+z^3)\cdot\frac{x+y+z}{2}+5(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 \leq 4\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^4.$$

După efectuarea calculelor şi reducerea termenilor asemenea se ajunge la

$$\frac{1}{2}\left(x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y + x^2yz + xy^2z + xyz^2\right) \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,$$

adică cu notaţiile de la inegalitatea lui Muirhead,

$$\frac{1}{2}\left([3,1,0] + \frac{1}{2}[2,1,1]\right) \geq \frac{1}{2}[2,2,0],$$

adică $2 \cdot [3, 1, 0] + [2, 1, 1] \geq 2 \cdot [2, 2, 0]$. Inegalitatea este foarte slabă: ea rezultă din $[3, 1, 0] \geq [2, 2, 0]$ (Muirhead) şi $[2, 1, 1] \geq 0$.
De aici se văd uşor cazurile de egalitate: trebuie să avem $[2, 1, 1] = 0$, $[3, 1, 0] = [2, 2, 0]$ şi $x + y + z = 2$. Prima condiţie se scrie $xyz(x + y + z) = 0$. Deducem că $x = 0$, $y = 0$ sau $z = 0$. Datorită simetriei, putem presupune $x = 0$. Atunci condiţia a doua revine la $y^3z + z^3y = 2y^2z^2$, adică la $yz(y - z)^2 = 0$. Atunci fie $y = 0$ sau $z = 0$ (ceea ce împreună cu $x+y+z = 2$ conduce la un triplet de forma $(0, 0, 2)$), fie $y = z$ (ceea ce împreună cu $x + y + z = 2$ conduce la un triplet de forma $(0, 1, 1)$). În concluzie, cazurile de egalitate sunt $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ şi permutările acestora.

Titu Zvonaru ne propune următoarea întărire a inegalităţii:
Demonstraţi că $x^4 + y^4 + z^4 - 4(x^3 + y^3 + z^3) + 5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 4 - xyz$, oricare ar fi $x, y, z \geq 0$, cu $x + y + z = 2$. Când are loc egalitatea?
Soluţie: Omogenizând ca în soluţia a doua de mai sus, se ajunge la $[3, 1, 0] \geq$

$[2,2,0]$ care rezultă din inegalitatea lui Muirhead sau scriind-o sub forma echivalentă $xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2 \geq 0$. Egalitate avem dacă fiecare termen este 0, lucru care se întâmplă dacă $x=y=z=\frac{2}{3}$ sau dacă (x,y,z) este unul din cele şase triplete pentru care avem egalitate şi în inegalitatea din problema săptămânii.

Problem of the week no. 109
Prove that $x^4+y^4+z^4-4(x^3+y^3+z^3)+5(x^2+y^2+z^2) \leq 4$, for all $x,y,z \geq 0$ satisfying $x+y+z=2$. When does equality occur?

Clara Iurea

Solution 1: We have $a(a-1)^2(a-2) \leq 0$, $\forall\,, a \in [0,2]$, with equality if and only if $a \in \{0,1,2\}$. This inequality is equivalent to $a^4-4a^3+5a^2 \leq 2a$. Writing it for $a=x$, $a=y$, $a=z$ and adding the three inequalities gives, after using the condition $x+y+z=2$ the required inequality. Note that $x,y,z \geq 0$ with $x+y+z=2$ means that $x,y,z \in [0,2]$. Equality occurs when $x,y,z \in \{0,1,2\}$ have sum 2, i.e. for the triples $(x,y,z)=(0,0,2)$, $(x,y,z)=(1,1,0)$ and their permutations.

Soluţia 2:
The given inequality is equivalent to

$$x^4+y^4+z^4-4(x^3+y^3+z^3)\cdot\frac{x+y+z}{2}+5(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 \leq 4\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^4.$$

After computations, this translates to

$$\frac{1}{2}\left(x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y+x^2yz+xy^2z+xyz^2\right) \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,$$

i.e., using the notations from Muirhead's inequality, $\frac{1}{2}\left([3,1,0]+\frac{1}{2}[2,1,1]\right) \geq \frac{1}{2}[2,2,0]$, or $2\cdot[3,1,0]+[2,1,1] \geq 2\cdot[2,2,0]$. The given inequality is very weak: it follows from $[3,1,0] \geq [2,2,0]$ (Muirhead) and $[2,1,1] \geq 0$.
One can easily see the equality cases: we need to have $[2,1,1]=0$, $[3,1,0]=[2,2,0]$ and $x+y+z=2$. The first condition means $xyz(x+y+z)=0$. It follows that $x=0$, $y=0$ or $z=0$. Because of the symmetry of the inequality, we may assume that $x=0$. The second condition becomes $y^3z+z^3y=2y^2z^2$, i.e. $yz(y-z)^2=0$. Then either one of y and z is 0 (which together with $x+y+z=2$ leads to a triple of the form $(0,0,2)$), or $y=z$ (which together with $x+y+z=2$ leads to a triple of the form $(0,1,1)$). In conclusion, the equality cases are $(x,y,z)=(0,0,2)$, $(x,y,z)=(1,1,0)$ and their permutations.