Problema săptămânii 108

Două cercuri, c_1 şi c_2, sunt secante în punctele A şi B. Fie $P \in c_1$ şi $Q \in c_2$, astfel încât dreapta PQ este tangenta comună a cercurilor c_1 şi c_2 care este mai apropiată de punctul A decât de punctul B. Notăm cu S cel de al doilea punct de intersecţie a dreptei PB cu cercul c_2 şi cu R cel de al doilea punct de intersecţie a dreptei BQ cu cercul c_1, iar cu M şi N mijloacele segmentelor $[PR]$ şi $[SQ]$. Arătaţi că semidreapta $(AB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAN$.

Ivan Guo, Olimpiadă Australia

Soluţie: (*Radu Lecoiu*)

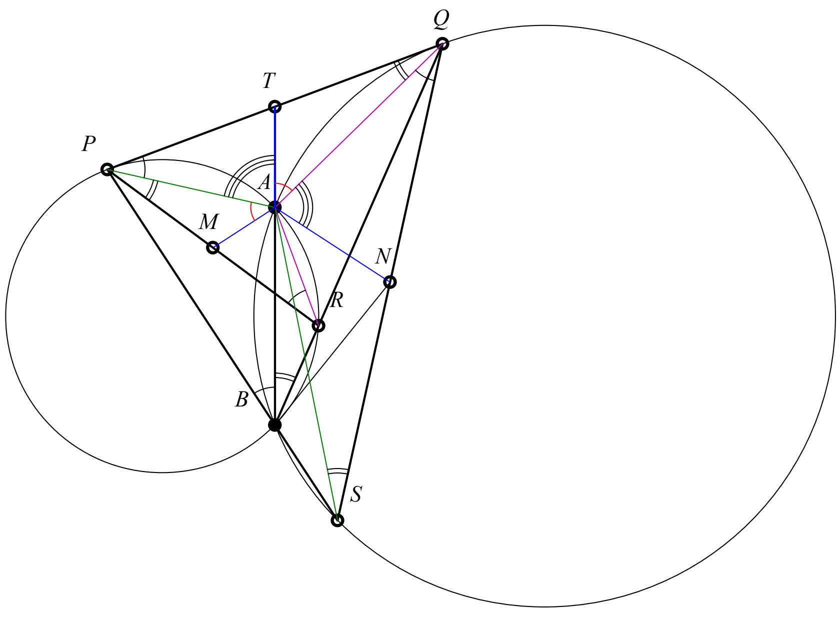
Fie $\{T\} = AB \cap PQ$. Din puterea punctului T faţă de cele două ceruri avem $TP^2 = TA \cdot TB = TQ^2$, deci $TP = TQ$.

Cum $PARB$ este inscriptibil, avem $\sphericalangle APM \equiv \sphericalangle ABR$. $[TM]$ este linie mijlocie în triunghiul PRQ, deci $TM \parallel QR$. Rezultă că $\sphericalangle MTA \equiv \sphericalangle TBQ \equiv \sphericalangle ABR \equiv \sphericalangle APM$. Rezultă că patrulaterul $TPMA$ este inscriptibil.

Analog rezultă că patrulaterul $TANQ$ este inscriptibil.

Atunci $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle TPR) = m(\sphericalangle TPA) + m(\sphericalangle APR) = m(\sphericalangle AQN) + m(\sphericalangle AQP) = m(\sphericalangle TQN) = m(\sphericalangle BAN)$, de unde concluzia.

(Am folosit că unghiurile $\sphericalangle TPA$ şi $\sphericalangle PBA$ subîntind coarda AP în cercul c_1, deci sunt congruente şi, la fel, unghiurile $\sphericalangle TQA$ şi $\sphericalangle ABQ$ subîntind arcul AQ în cercul c_2, deci sunt congruente).



Remarcă: (*Radu Lecoiu*) Mai mult, TA este dreapta suport a simedianei din A a triunghiului TMN.

Într-adevăr, dacă $TA \cap MN = \{X\}$, avem:

$\dfrac{MX}{XN} = \dfrac{MT}{TN} \cdot \dfrac{\sin(\sphericalangle MTA)}{\sin(\sphericalangle NTA)} = \dfrac{MT}{TN} \cdot \dfrac{\sin(\sphericalangle ANT)}{\sin(\sphericalangle AMT)} = \left(\dfrac{MT}{TN}\right)^2$, ceea ce cu reciproca teoremei lui Steiner arată că T este piciorul simedianei din A.

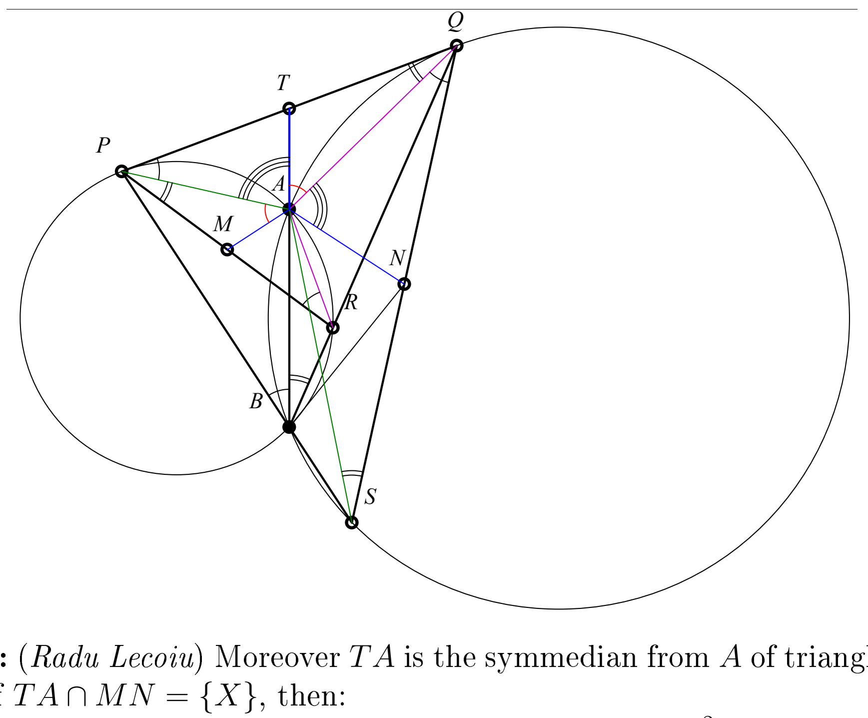
De fapt, cum $\sphericalangle TMA \equiv \sphericalangle ATN$ şi $\sphericalangle TNA \equiv \sphericalangle ATM$, A este punctul „dumpty" definit în articolul Two Special Points., punct despre care în respectivul articol se arată că se află pe simediana din T a triunghiului TMN.

Problem of the week no. 108

Two circles, c_1 and c_2, intersect at A and B. Let $P \in c_1$ and $Q \in c_2$ be such that PQ is the common tangent to the two circles that is closer to A than to B. The line PB meets again the circle c_2 at S, while BQ meets again c_1 at R. Let M and N be the midpoints of the line segments PR and SQ, respectively. Prove that the line AB bisects the angle $\sphericalangle MAN$.

Ivan Guo (Australian Olympiad)

Solution: (*Radu Lecoiu*)
Let $\{T\} = AB \cap PQ$. From the power of T with respect to the two circles we get $TP^2 = TA \cdot TB = TQ^2$, hence $TP = TQ$.
As $PARB$ is cyclic, we have $\sphericalangle APM = \sphericalangle ABR$. $[TM]$ is a midline in triangle PRQ, therefore $TM \parallel QR$. It follows that $\sphericalangle MTA = \sphericalangle TBQ = \sphericalangle ABR = \sphericalangle APM$. This shows that the quadrilateral $TPMA$ is cyclic.
Similarly we obtain that $TANQ$ is cyclic.
Then $\sphericalangle MAB = \sphericalangle TPR = \sphericalangle TPA + \sphericalangle APR = \sphericalangle AQN + \sphericalangle AQP = \sphericalangle TQN = \sphericalangle BAN$, and the conclusion.



Remark: (*Radu Lecoiu*) Moreover TA is the symmedian from A of triangle TMN. Indeed, if $TA \cap MN = \{X\}$, then:
$\dfrac{MX}{XN} = \dfrac{MT}{TN} \cdot \dfrac{\sin(\sphericalangle MTA)}{\sin(\sphericalangle NTA)} = \dfrac{MT}{TN} \cdot \dfrac{\sin(\sphericalangle ANT)}{\sin(\sphericalangle AMT)} = \left(\dfrac{MT}{TN}\right)^2$, which, by the converse of Steiner's Theorem, shows that T is the foot of the symmedian from A.

Actually, as $\sphericalangle TMA = \sphericalangle ATN$ and $\sphericalangle TNA \equiv \sphericalangle ATM$, A is the „dumpty-point" as defined in Two Special Points.