Problema săptămânii 105
Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi inegalităţile:

$$(a+b)\sqrt{ab}+(a+c)\sqrt{ac}+(b+c)\sqrt{bc}>\frac{1}{2}(a+b+c)^2,$$

Olimpiada „Caucasus", 2018

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\le 3.$$

List scurtă OIM, 2006 (pb A5, propusă de Coreea de Sud)

Soluţie:
Prima inegalitate:
Avem $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, deci $(a+b)\sqrt{ab} \ge 2ab$ şi analoagele.
Pe de altă parte, $a+b>c$ implică $ac+bc>c^2$ şi analoagele. Adunând aceste trei relaţii obţinem $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$, deci $4(ab+bc+ca)>(a+b+c)^2$.
Avem aşadar $(a+b)\sqrt{ab}+(a+c)\sqrt{ac}+(b+c)\sqrt{bc}\ge 2(ab+bc+ca)>\frac{1}{2}(a+b+c)^2$.

Comentariu: Inegalitatea $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$ pentru laturile unui triunghi este foarte cunoscută. Ea se poate demonstra uşor şi altfel:
• Făcând *substituţiile lui Ravi* $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, unde $x, y, z>0$ se ajunge la $4(xy+yz+zx)>0$, ceea ce este evident.
• Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ reprezintă lungimile laturilor unui triunghi (chiar ascuţitunghic). Scriind cu formula lui Heron inegalitatea evidentă $16s^2>0$, unde s este aria acestui ultim triunghi, se obţine tocmai inegalitatea de mai sus.

Inegalitatea a doua:
Numitorii inegalităţii ne sugerează că probabil $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. (De obicei numitorii sunt pozitivi. În plus, dacă ei ar putea fi aproape de 0, respectivele fracţii ar putea deveni foarte mari, ceea ce ar constrazice inegalitatea.)
Acest lucru se demonstează foarte uşor: $a+b>c$ implică $a+b+2\sqrt{ab}>c$, adică $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2$, de unde $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.
Făcând atunci în triunghiul de laturi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ substituţiile lui Ravi, avem $\sqrt{a}=x+y$, $\sqrt{b}=y+z$, $\sqrt{c}=z+x$, adică $a=(x+y)^2$, $b=(y+z)^2$, $c=(z+x)^2$.
Înlocuind în inegalitatea din enunţ, aceasta devine

$$\frac{\sqrt{2x^2+2xy+2xz-2yz}}{2x}+\frac{\sqrt{2y^2+2xy+2yz-2xz}}{2y}+\frac{\sqrt{2z^2+2xz+2yz-2xy}}{2z}\le 3.$$

Conform inegalităţii dintre media aritmetică şi media pătratică, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{2x^2+2xy+2xz-2yz}{4x^2}+\frac{2y^2+2xy+2yz-2xz}{4y^2}+\frac{2z^2+2xz+2yz-2xy}{4z^2}\le 3,$$

adică
$$\frac{xy+zx-yz}{x^2}+\frac{yz+xy-zx}{y^2}+\frac{zx+yz-xy}{z^2}\le 3.$$

Eliminând numitorii se ajunge la inegalitatea lui Schur $m^3+n^3+p^3+3mnp \ge m^2n+m^2p+n^2m+n^2p+p^2m+p^2n$ scrisă pentru $m=xy$, $n=yz$, $p=zx$. Cum $xy, yz, zx>0$, egalitate avem dacă $xy=yz=zx$, deci dacă $x=y=z$, ceea ce revine la $a=b=c$.

Despre substituţiile lui Ravi:

Deşi conoscute de multă vreme, ele poartă numele lui *Ravi Vakil*[1] care le-a folosit la pregătirea lotului Canadei în anii 1990.
Foarte des se foloseşte următoarea teoremă:
Teoremă: a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă există $x,y,z>0$ astfel încât $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$.
Teorema se poate justifica algebric sau geometric.
Algebric: Rezolvând sistemul, obţinem $x=\dfrac{a+c-b}{2}$, $y=\dfrac{a+b-c}{2}$, $z=\dfrac{b+c-a}{2}$. (Adunând ecuaţiile se obţine $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}\overset{\text{not}}{=}p$, semiperimetrul triunghiului, apoi scăzând succesiv ecuaţiile se obţin $x=p-b$, $y=p-c$, $z=p-a$. Dacă a,b,c sunt lungimi de laturi de triunghi, atunci $x,y,z>0$. Reciproc, dacă $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, cu $x,y,z>0$, atunci $a+b=x+y+y+z>x+z=c$ şi analoagele, deci a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi.
Geometric: (prima implicaţie)
Dacă în triunghiul ABC, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, notând cu A', B', C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB, avem $AB'=AC'=z$, $BA'=BC'=x$, $CA'=CB'=y$, atunci $a=BC=AC'+BC'=x+y$, $b=CA=CB'+B'A=y+z$, $c=AB=AC'+C'B=z+x$.

Problem of the week no. 105
Let a,b,c be the lengths of sides of a triangle. Prove the inequalities:

$$(a+b)\sqrt{ab}+(a+c)\sqrt{ac}+(b+c)\sqrt{bc}>\frac{1}{2}(a+b+c)^2,$$

Caucasus Mathematical Olympiad, 2018

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\le 3.$$

IMO Shortlist, 2006 (pb A5, proposed by Korea)

Solution:
The first inequality:
From $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, it follows that $(a+b)\sqrt{ab}\ge 2ab$ and we also obtain two similar

[1] Mai multe despre Ravi Vakil puteţi citi aici.

inequalities.
On the other hand, $a + b > c$ leads to $ac + bc > c^2$. Also, $bc + ca > c^2$ and $ab + ca > a^2$. Adding these inequalities yields $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$, hence $4(ab + bc + ca) > (a + b + c)^2$.
In conclusion: $(a+b)\sqrt{ab}+(a+c)\sqrt{ac}+(b+c)\sqrt{bc} \geq 2(ab+bc+ca) > \frac{1}{2}(a+b+c)^2$.
For the second inequality see here.