Lecţie juniori, lot restrâns,15-05-2018

Algebră,principiul extremal,inegalităţi

Marius Mîinea[1]

Problema 1. Fie $a \geq 1$ astfel încât aricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu n divide m, rezultă că $[na] \mid [ma]$. Demonstraţi că a este număr natural.

Soluţie. Presupunem prin absurd că $a \notin \mathbb{N}$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $na \notin \mathbb{N}$, deci $\{na\} > 0$. Fie $b \in \mathbb{N}^*$ maxim astfel încât $\{na\} < \frac{1}{b}$, deci $\{(n+1)a\} \geq \frac{1}{b+1}$.(De fapt $b \approx \left[\frac{1}{\{na\}}\right]$). Atunci $1 \leq (b+1)na - (b+1)[na] < 1 + \frac{1}{b}$. Luând $m = (b+1)n$ obţinem că $[ma] = (b+1)[na] + 1$ nu se divide $[na]$, contradicţie.

Problema 2. Fie $p > 5$ un număr prim şi $X = \{p - n^2 | \quad \text{n este natural nenul}, n^2 < p\}$. Demonstraţi că X conţine două elemente diferite x şi y cu $x \neq 1$ şi $x|y$.

Soluţie. i) Presupunem că $1 \in X$. Rezultă că pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$, par , $p = n^2+1$. Atunci $x = 2n$ şi $y = n^2$ verifică condiţia deoarece $2n = (n^2 + 1) - (n - 1)^2 = p - n^2$ şi $y = n^2 = p - 1^2$.

ii) Dacă $1 \notin X$, fie n cel mai mare număr natural nenul astfel încât $n^2 < p, (n = [\sqrt{p}])$, $x = p - n^2$ şi $y = p - (x-n)^2$. Avem $y = p - n^2 + 2nx - x^2 = x(1+2n-x), x \neq 1, x \in X$.

E suficient să arătăm că $g \in X$ adică $1 \leq |x - n| < n$.

Dacă prin absurd $|x - n| = 0$ atunci $x = n = p - n^2 \Rightarrow p = n(n + 1)$, fals.

Pe de altă parte din definiţia lui n rezultă că $p < n^2 + n + 1 \overset{p \text{ prim}}{\Rightarrow} p < n^2 + n \Rightarrow |x - n| = |p - n^2 - n| < n$, q.e.d.

Problema 3. Numerele de la 1 la 101 sunt scrise pe o tablă într-o ordine aleatoare. Demonstraţi că putem şterge 90 de numere astfel încât numerele rămase să formeze un şir monoton.

Soluţie. Fie L_m lungimea maximă a unui şir crescător care se termină cu m şi R_m lungimea maximă a unui şir descrescător care începe cu m. Pentru orice două numere k nu puem avea în acelaşi timp $L_k = L_m$ şi $R_k = R_m$ pentru că: dacă $k > m$ şi k e înaintea lui m, $R_k > R_m$; dacă $k > m$ şi k e după m m, $L_m < L_k$. Deci dacă prin absurd $\max(L_m, R_m) \leq 10$ atunci am avea 101 perechi distincte (L_m, R_m) care ar trebui să se afle printre $10 \cdot 10 = 100$ posibilitaţi, contradicţie.Aşadar există m astfel încât $\max(L_m, R_m) \geq 11$, c.c.t.d.

Observaţie: Generalizarea este o problemă a lui *Erdos* şi *Szekeres* care afirmă că : *Dacă avem un şir de $mn + 1$ numere naturale distincte, atunci există cel puţin un subşir crescător cu mai mult de n elemente sau cel puţin un subşir descrescător cu mai mult de m elemente.*

[1]profesor, Colegiul Naţional ,,Vladimir Streinu", Găeşti

Problema 4. Găsiţi toate mulţimile finite A de numere naturale nenule cu cel puţin 2 elemente astfel încât pentru orice elemente $a, b \in A, a > b$ să avem $\dfrac{b^2}{a-b} \in A$.

Soluţie. Fie m, M cel mai mic respectiv cel mai mare element din A. Atunci $\frac{m^2}{M-m} \geq m \Rightarrow 2m \geq M$. Dacă M_1 este penultimul element din A şi prin absurd $\frac{M_1^1}{M-M_1} = M$, atunci $M^2 - MM_1 - M_1^2 = 0$ care nu are soluţii intregi. Aşadar $\frac{M_1^1}{M-M_1} = M_1 \Leftrightarrow 2M_1 \leq M \Rightarrow 2M_1 \leq M \leq 2m$, deci $m = M_1$ şi $M = 2m$. Aşadar $A = \{k, 2k | k \in \mathbb{N}^*\}$.

Problema 5. Aflaţi $n > 0$ natural astfel încât $\dfrac{n^2+1}{[\sqrt{n}]^2+2} \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie $m = [\sqrt{n}], n = m^2 + k, k \leq 2m$. Atunci

$$\frac{(m^2+k)^2+1}{m^2+2} = m^2 + (2k-2) + \frac{(k-2)^2+1}{m^2+2} \in \mathbb{N}$$

Dar $(k-2)^2+1 \leq (2m-2)^2+1 = 4m^2-8m+5 < 4(m^2+2)$. Rezultă $\frac{(k-2)^2+1}{m^2+2} \in \{1, 2, 3\}$.
i) $(k-2)^2+1 = m^2+2 \Rightarrow (k-2-m)(k-2+m) = 1 \Leftrightarrow m = 0 \quad$ şi $k-2 = \pm 1$, fals.
ii)$(k-2)^2+1 = 2m^2+4 \Leftrightarrow (k-2)^2 - 2m^2 = 3 \Rightarrow (k-2) \equiv 0(\mod 3) \Rightarrow$
$(k-2)^2 \equiv 2m^2 \equiv 0(\mod 9)$,fals.
iii) $(k-2)^2+1 = 3m^2+6 \Rightarrow (k-2)^2 - 3m^2 = 5 \Rightarrow (k-2)^2 \equiv 2(\mod 3)$, fals.
În concluzie nu există numere cu această proprietate.

Problema 6. Fie $A_1A_2 \ldots A_{2018}$ un poligon convex cu toate vârfurile în puncte laticeale(de coordonate întregi în reperul xOy), care are două diagonale ce se intersectează în $O(0)$. Dacă $S[A_1A_2 \ldots A_{2018}] = 1009$ atunci există patru vârfuri ce formează un paralelogram de arie 2.

Soluţie. Aplicând teorema lui *Pick* , $\frac{b}{2} + i - 1 = 1009$ şi deoarece $b \geq 2018, i \geq 1$ deducem că avem agalităţi, $b = 2018, i = 1$. Dacă AC şi BD sunt diagonalele din enunţ aplicând din nou teorema lui *Pick* triunghiurilor $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$ deducem că toate au aria $\frac{1}{2}$, diagonalele AC şi BD se înjumătăţesc deci $ABCD$ este paralelogram de arie 2.

Problema 7. Vârfurile unui pentagon convex sunt puncte laticeale. Demonstraţi că aria pentagonului este cel puţin $\frac{5}{2}$.

Soluţie. Din *Principiul Cutiei* există două vârfuri care au coordonatele de aceeaşi paritate, deci mijlocul segmentului respectiv se află în interiorul pentagonului. În fine aplicând teorema lui *Pick* , $S \geq \frac{5}{2} + 1 - 1 = \frac{5}{2}$, c.c.t.d.

Problema 8. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci

$$\frac{(3a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(3b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(3c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq \frac{25}{2}$$

Soluţie. Deoarece inegalitatea este omogenă putem presupune că $a + b + c = 1$;

i) Dacă există unul dintre numere cel mult egal cu $\frac{1}{20}$, sa zicem $a \leq \frac{1}{20}$, atunci $\frac{4}{3} - \frac{4a^2+4a+1}{3a^2-2a+1} \geq 0$, $\frac{11}{2} - \frac{4b^2+4b+1}{3b^2-2b+1} \geq 0$, $\frac{11}{2} - \frac{4c^2+4c+1}{3c^2-2c+1} \geq 0$ deci $\sum \leq \frac{11}{2} + \frac{11}{2} + \frac{4}{3} < \frac{25}{2}$
ii) Dacă $a, b, c > \frac{1}{20}$ atunci $\frac{60a+5}{6} - \frac{4a^2+4a+1}{3a^2-2a+1} = \frac{(20a-1)(3a-1)^2}{6(3a^2-2a+1)} \geq 0$ şi analoagele deci $\sum \leq \frac{60(a+b+c)+15}{6} = \frac{25}{2}$, c.c.t.d.
Observaţie.
Se poate arăta că pentru $a, b, c > 0, 0 < q < 2 + \sqrt{6}$ avem $\sum \frac{(qa+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{(q+2)^2}{2}$.

Problema 9. Fie $a, b, c \geq 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Arătaţi că

$$(a + b + c)^3 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Soluţie. Când cele trei variabile sunt multiplicate prin $t \geq 1$, LHS se multiplică prin t^3 iar RHS prin t^2. Deci e suficient să demonstrăm inegalitatea în cazul $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Într-adevăr, notând $s = a+b+c \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{s^2-3}{2}$ şi inegaliatea devine $s^3 \geq \frac{9(s^2-3)}{2} \Leftrightarrow (s-3)^2(2s+3) \geq 0$, adevărat.

Problema 10. Demonstraţi că dacă numerele naturale $a < b < c < d$ verifică $ad = bc$, atunci

$$\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 \geq a + 2$$

Soluţie. Observăm că $(a-d)^2 = (a+d)^2 - 4bc > (a+d)^2 - (b+c)^2 = [(a+d) - (b+c)](a+b+c+d)$; $\boxed{1}$. Notăm $b = a+x, c = a+y, d = a+z, x, y, z \in \mathbb{N}^*$ şi obţinem: $a(a+z) = (a+x)(a+y) \Rightarrow az = a(x+y)+xy > a(x+y) \Rightarrow z > x+y \Rightarrow z \geq x+y+1 \Rightarrow a+d \geq b+c+1$; $\boxed{2}$. Din $\boxed{1}$ şi $\boxed{2}$ rezultă $(a-d)^2 \geq 1 \cdot (a+a+1+a+2+a+3) = 4a+6$. În fine deoarece $4a+6$ şi $4a+7$ nu sunt pătrate perfecte obţinem că $(a-d)^2 \geq 4a+8$, c.c.t.d.

Problema 11. Fie $P = \{P_1, P_2, ..., P_{2018}\}$ o mulţime de 2018 puncte în interiorul unui cerc de rază 1 si centru P_1. Pentru fiecare $k = 1, 2..., 2018$ notăm cu x_k distanţa de la P_k la cel mai apropiat punct din P dar diferit de acesta. Arătaţi că :

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{2018})^2 \leq 9$$

.

Soluţie. Desenăm cercurile C_i cu centrele în P_i şi raza $\frac{x_i}{2}$. Este uşor de vazut că aceste cercuri au interioarele disjuncte. Presupunând contrariul: $\text{Int}(C_i) \cap \text{Int}(C_j) \neq \emptyset$, rezultă $P_iP_j < \frac{x_i+x_j}{2} \leq \max\{x_i, x_j\}$, contradicţie cu minimalitatea lui x_i şi x_j .

Întrucât fiecare cerc are raza cel mult $\frac{1}{2}$ (pentru că $P_1P_i \leq 1$), toate aceste cercuri cu interioarele disjuncte sunt conţinute într-un cerc de centru P_1 şi rază $\frac{3}{2}$. Rezultă că suma ariilor discurilor cu frontiera C_i este mai mică decât aria discului de centru P_1 şi rază $\frac{3}{2}$, prin urmare $\sum \pi \frac{x_i^2}{4} \leq \pi \frac{9}{4}$. De aici rezultă concluzia problemei.

Problema 11. Fiind dat un număr natural nenul n să se găsească cel mai mare număr nenegativ $f(n)$ (care depinde de n) cu următoarea proprietate: ,,Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ având suma $a_1+a_2+...+a_n$ un număr întreg există un anumit $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $|a_i - \frac{1}{2}| \geq f(n)$".

Soluţie.

i) Dacă n par, luând $a_i = \frac{1}{2}, i = \overline{1,n}, \sum a_i = \frac{n}{2}$ este întreg şi $\mid a_i - 1/2 \mid = 0 \geq f(n)$, deci $f(n) = 0$ în acest caz.

ii) Dacă n impar $\sum \mid a_i - 1/2 \mid \geq \mid \sum a_i - \frac{n}{2} \mid \geq 1/2$ deci există $j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $\mid a_j - 1/2 \mid \geq 1/2n$ aşadar $f(n) \geq 1/2n$.

Dacă $a_i = 1/2 + 1/2n$ pentru $i = \overline{1,n}, \mid a_i - 1/2 \mid = 1/2n$ pentru toţi $i = \overline{1,n}$ în concluzie $f(n) = 1/2n$.

Probleme propuse

Problema 1. Fie $a, b, c, d > 0$ cu $abcd = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a^3 + b^3 + c^3 = 24$. Atunci

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2^4 \geq (a + b + c - 2)^2 + 16$$

Problema 3. Dacă a, b, c sunt numere reale nenegative , atunci

$$9(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1) \geq 8(a^2b^2c^2 + abc + 1)^2$$

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 100 sunt aranjate în mod arbitrar pe un cerc. Pentru fiecare trei numere aranjate consecutiv se calculează suma lor. Să se arate că printre astfel de sume există două a căror diferenţă este mai mare decât 2.

Problema 5. Pe o pistă circulară sunt n maşini identice. Ele au împreună o cantitate de benzină care ajunge unei singure maşini să facă un tur complet. Demonstraţi că există o maşină care poate să facă un tur complet, luând benzină de la maşinile întâlnite în drum.

Problema 6. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi S o submulţime cu $(2^m - 1)n + 1$ elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2^m n\}$. Să se arate că S conţine $m + 1$ elemente distincte $a_0, a_1, \ldots, a_m$ astfel încât $a_{k-1} | a_k$ pentru orice $k = 0, 1, \ldots, m$.

Bibliografie

[1] Colecţia Gazeta Matematică
[2] Colecţia A.o.p.s.