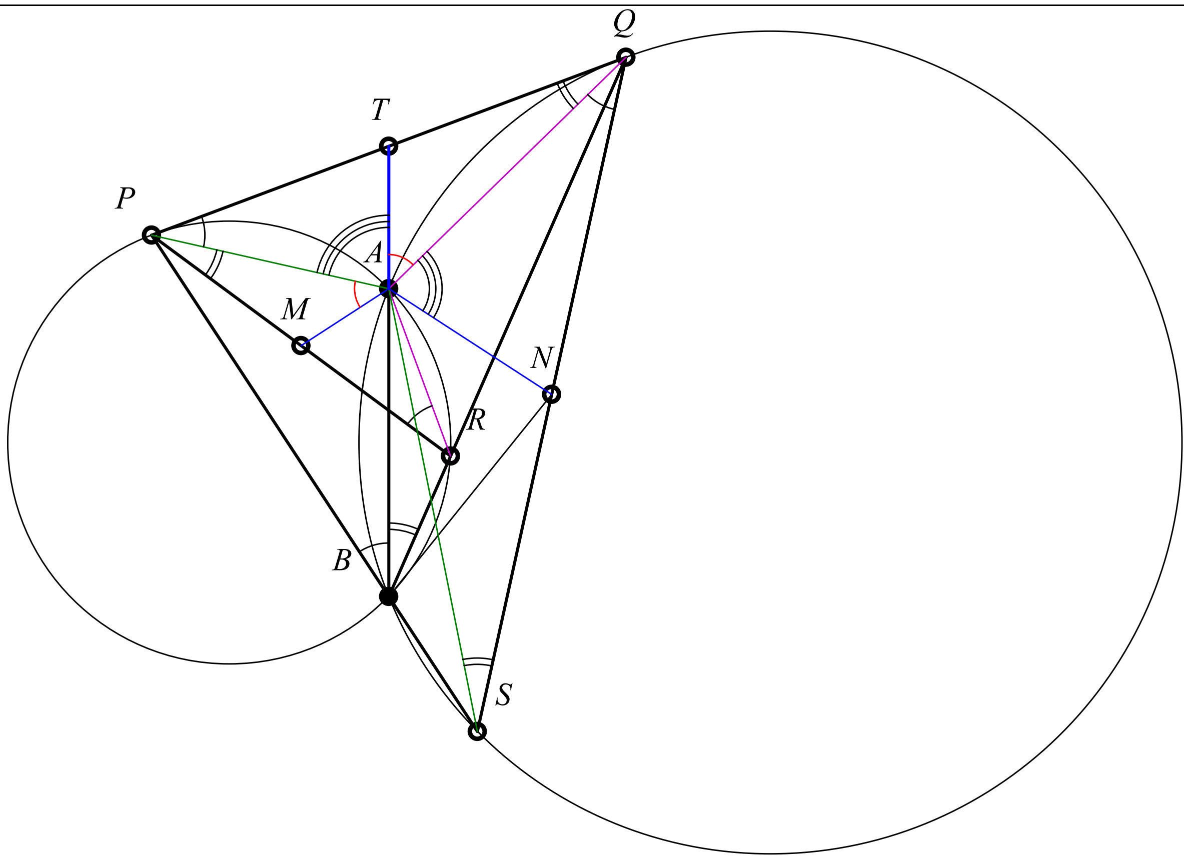
**Problema 8 (Australian Mathematical Olympiad 2018):**

**Două cercuri $c_1$ şi $c_2$ sunt secante în punctele $A$ şi $B$. Fie $P \in c_1$ şi $Q \in c_2$, astfel încât dreapta $PQ$ – este tangenta comună a cercurilor $c_1$ şi $c_2$, care este mai apropiată faţă de punctul $A$ decât de punctul $B$. Notăm cu $S$ – cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei $PB$, cu cercul $c_2$ şi cu $R$ – cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei $BQ$, cu cercul $c_1$; iar cu $M$ şi $N$ – mijloacele segmentelor $[PR]$ şi $[SQ]$. Arătaţi că semidreapta $(AB$ – este bisectoarea unghiului $\widehat{MAN}$.** (*Ivan Guo*, SYDNEY)




**SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):** Notând cu $\{T\} = PQ \cap AB$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} PQ \cap c_1 = \{P\} \Rightarrow |TP|^2 = |TA| \cdot |TB| \\ PQ \cap c_2 = \{Q\} \Rightarrow |TQ|^2 = |TA| \cdot |TB| \end{array}\right\} \Rightarrow [TP] \equiv [TQ]. \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem:

$$\left.\begin{array}{r} PQ \cap \odot PBRA = \{P\} \Rightarrow \widehat{QPA} \equiv \widehat{PRA} \equiv \underline{\widehat{PBA}} \\ ABSQ - inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{PBA}} \equiv \widehat{SQA} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{QPA} \equiv \widehat{PRA} \equiv \widehat{PBA} \equiv \widehat{SQA}. \quad (2)$$

În mod analog se arată că: $\widehat{PQA} \equiv \widehat{ASQ} \equiv \widehat{ABQ} \equiv \widehat{APR}$. (3)

Din relaţiile (2) şi (3), rezultă acum, că ([1]):

$$\Delta APQ \sim \Delta ARP \sim \Delta AQS \Leftrightarrow |AP|,|AQ|,|PQ| \sim |AR|,|AP|,|PR| \sim |AQ|,|AS|,|QS|; \quad (4)$$

Însă cum punctele $T, M$ şi $N$ – sunt mijloacele segmentelor $[PQ]$(v.relatia (1)), $[PR]$ şi respectiv $[QS] \Rightarrow$ aceste puncte sunt nişte puncte omoloage ale celor 3 triunghiuri asemena, aşa că avem atunci: $\Delta ATP \sim \Delta ANQ \Rightarrow \widehat{TAP} \equiv \widehat{NAQ}$; (5) şi $\Delta TAQ \sim \Delta MAP \Rightarrow \widehat{TAQ} \equiv \widehat{MAP}$. (6)

---

[1]) Folosesc notaţia $x, y, z \sim a, b, c \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (adica: numerele $x, y, z$ sunt direct proporţionale cu numerele $a, b, c$).

În fine, ţinând acum seama de ralaţiile (5) şi (6), obţinem, că:

$$m\left(\widehat{BAM}\right)=180^0-\left[m\left(\widehat{TAP}\right)+m\left(\widehat{TAQ}\right)\right]=180^0-\left[m\left(\widehat{NAQ}\right)+m\left(\widehat{MAP}\right)\right]=m\left(\widehat{BAN}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\widehat{BAM}\equiv\widehat{BAN}}.\ \blacksquare$$