BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 28 aprilie 2018 (barajul 4)

Problema 1. Aflaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac relaţiile:

$$a^2 - bc = 42,\ b^2 - ca = 6,\ c^2 - ab = -30.$$

Problema 2. Numerele de la 1 la 2018 au fost scrise pe câte un cartonaş, apoi cartonaşele au fost amestecate şi introduse în plicuri, câte două cartonaşe în fiecare plic. În fine, pe fiecare plic s-a scris modulul diferenţei dintre numerele scrise pe cele două cartonaşe din interiorul plicului. Ştiind că ultima cifră a fiecăruia dintre numererele scrise pe plicuri este 1 sau 6, determinaţi ultima cifră a sumei tuturor numerelor scrise pe plicuri.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie e dreapta care trece prin C şi este perpendiculară pe dreapta AC şi fie d dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BD. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor e şi d. Dacă cercul cu centrul în P şi de rază PC intersectează dreapta BC în punctul T, $(T \neq C)$, şi dreapta DC în punctul Y, $(T \neq C)$, demonstraţi că dreapta AT trece prin punctul Y.

Problema 4. Se dau două puncte în plan şi un număr real θ, unde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Jucăm următorul joc: la fiecare pas, alegem unul din cele două puncte şi îl rotim în sens contrar acelor de ceasornic cu un unghi de măsură θ în jurul celuilalt punct. Pentru a câştiga, trebuie să ajungem să schimbăm între ele poziţiile iniţiale ale celor două puncte.
a) Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ (adică $\theta = 90°$), demonstraţi că nu putem câştiga jocul.
b) Stabiliţi dacă există un $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ pentru care putem câştiga jocul. Justificaţi răspunsul.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Aflaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac relaţiile:

$$a^2 - bc = 42,\ b^2 - ca = 6,\ c^2 - ab = -30.$$

Soluţie:
Scăzând a doua ecuaţia din prima şi cea de-a treia din cea de-a doua, obţinem

$$(a^2 - bc) - (b^2 - ca) = 36 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + c) = 36 \qquad (1)$$

şi

$$(b^2 - ca) - (c^2 - ab) = 36 \Leftrightarrow (b - c)(a + b + c) = 36. \qquad (2)$$

Deoarece $a - b$, $b - c$ şi $a + b + c$ sunt numere nenule, din (1) şi (2) rezultă că $a - b = b - c$, adică

$$a = 2b - c. \qquad (A)$$

Substituind (A) în primele două din relaţiile date, obţinem

$$(2b - c)^2 - bc = 42 \Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 = 42 \qquad (3)$$

şi

$$b^2 - (2b - c)c = 6 \Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 = 6 \Leftrightarrow (b - c)^2 = 6 \Leftrightarrow b = c \pm \sqrt{6}.$$

Înlocuind în relaţia (3) obţinem:
• Dacă $b = c + \sqrt{6}$, atunci

$$4(c + \sqrt{6})^2 - 5(c + \sqrt{6})c + c^2 = 42 \Leftrightarrow c\sqrt{6} = 6,$$

deci $c = \sqrt{6}$, apoi $b = 2\sqrt{6}$ şi, din (A), $a = 3\sqrt{6}$, aşadar

$$(a, b, c) = \big(3\sqrt{6},\ 2\sqrt{6},\ \sqrt{6}\big).$$

• Dacă $b = c - \sqrt{6}$, atunci

$$4(c - \sqrt{6})^2 - 5(c - \sqrt{6})c + c^2 = 42 \Leftrightarrow c\sqrt{6} = -6,$$

deci $c = -\sqrt{6}$, apoi $b = -2\sqrt{6}$ şi, din (A), $a = -3\sqrt{6}$, aşadar

$$(a, b, c) = \big(-3\sqrt{6},\ -2\sqrt{6},\ -\sqrt{6}\big).$$

Problema 2. Numerele de la 1 la 2018 au fost scrise pe câte un cartonaş, apoi cartonaşele au fost amestecate şi introduse în plicuri, câte două cartonaşe în fiecare plic. În fine, pe fiecare plic s-a scris modulul diferenţei dintre numerele scrise pe cele două cartonaşe din interiorul plicului. Ştiind că ultima cifră a fiecăruia dintre numererele scrise pe plicuri este 1 sau 6, determinaţi ultima cifră a sumei tuturor numerelor scrise pe plicuri.

Soluţie:
Fie a_i şi b_i numerele scrise pe cartonaşele introduse în plicul al i-lea şi t_i numărul scris pe plicul al i-lea ($i = 1, 2, \ldots, 1009$). Atunci:

$$t_i \equiv 1 \text{ sau } 6 \pmod{10} \text{ şi } t_i = |a_i - b_i|, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, 1009. \qquad (1)$$

Vrem să aflăm ultima cifră a sumei $S = t_1 + t_2 + \ldots + t_{1009}$. Din (1) rezultă că $t_i \equiv 1 \pmod 5$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, 1009\}$, deci

$$S \equiv 1009 \equiv 4 \pmod 5.$$

Aşadar, ultima cifră a lui S va fi 4 sau 9. Pentru a putea decide între cele două variante, este suficient să aflăm dacă S este par sau impar. Dar diferenţa dintre două numere şi suma lor sunt congruente mod 2, deci avem

$$S = |a_1 - b_1| + + \ldots + |a_{1009} - b_{1009}| \equiv |a_1 + b_1| + \ldots + |a_{1009} + b_{1009}| \pmod 2$$

$$\equiv 1 + 2 + \ldots + 2018 \equiv 1 + 0 + 1 + 0 + \ldots + 1 + 0 \equiv 1 \pmod 2.$$

Prin urmare, S este număr impar, deci ultima sa cifră este 9.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie e dreapta care trece prin C şi este perpendiculară pe dreapta AC şi fie d dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BD. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor e şi d. Dacă cercul cu centrul în P şi de rază PC intersectează dreapta BC în punctul T, $(T \neq C)$, şi dreapta DC în punctul Y, $(T \neq C)$, demonstraţi că dreapta AT trece prin punctul Y.

ShortList JBMO, 2017 (pb G1)

Soluţie: (corectată)
Fie E punctul de intersecţie a dreptelor d şi BD şi fie T' al doilea punct de intersecţie a dreptei AY cu cercul de centru P şi rază PC. Vom demonstra că punctele T' şi T coincid. Perpendiculara din P pe coarda $[YT']$ o intersectează pe aceasta în M. Punctele M şi C sunt pe cercul de diametru $[AP]$, deci P, M, C, A sunt conciclice, deci

$$\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle APC \equiv \sphericalangle BOC. \qquad (1)$$

Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului. Patrulaterul $EPCO$ este şi el inscriptibil (în cercul de diametru $[PO]$). Avem

$$\sphericalangle COB \equiv \sphericalangle EPC \equiv \sphericalangle APC. \qquad (2)$$

Deoarece AC este tangentă în C cercului de centru P şi rază PC şi dreptele AB şi CD sunt paralele, obţinem că

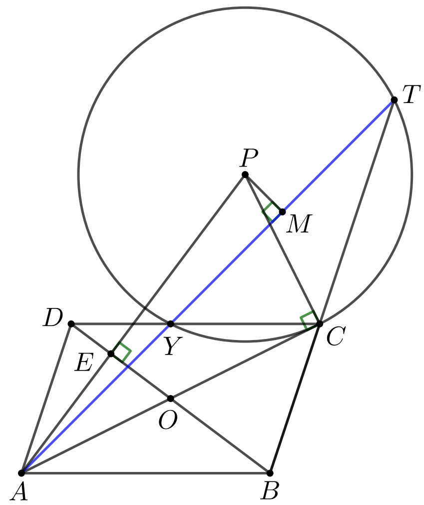
$$\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DCO \equiv \sphericalangle YT'C.$$

Rezultă că $m(\sphericalangle OBA) = m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle OAB) = m(\sphericalangle AMC) - m(\sphericalangle YT'C) = m(\sphericalangle MCT')$, deci triunghiurile OAB şi $MT'C$ sunt asemenea.

Rezultă că $\dfrac{T'C}{AB} = \dfrac{MT'}{OA} = \dfrac{2MT'}{2OA} = \dfrac{YT'}{AC}$, deci triunghiurile $YT'C$ şi CAB sunt şi ele asemenea. Rezultă că

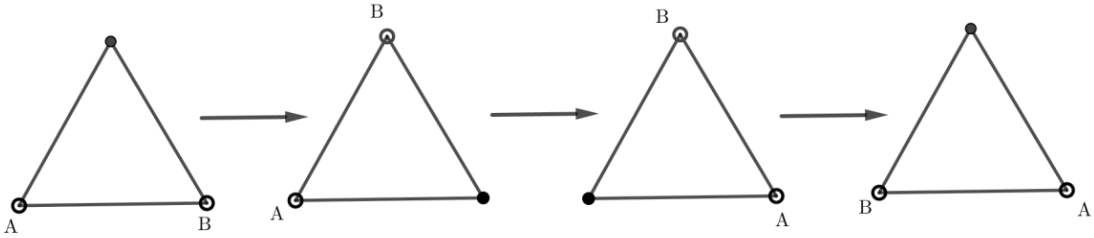
$$\sphericalangle YCT' \equiv \sphericalangle CBA,$$

deci $T' \in BC$. Prin urmare, $T' = T$, de unde concluzia.



Problema 4. Se dau două puncte în plan şi un număr real θ, unde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Jucăm următorul joc: la fiecare pas, alegem unul din cele două puncte şi îl rotim în sens contrar acelor de ceasornic cu un unghi de măsură θ în jurul celuilalt punct. Pentru a câştiga, trebuie să ajungem să schimbăm între ele poziţiile iniţiale ale celor două puncte.
a) Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ (adică $\theta = 90°$), demonstraţi că nu putem câştiga jocul.
b) Stabiliţi dacă există un $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ pentru care putem câştiga jocul. Justificaţi răspunsul.

Soluţie:
a) Putem presupune fără a restrânge generalitatea că cele două puncte iniţiale sunt $A(0,0)$ şi $B(1,0)$. Atunci după fiecare pas punctele A şi B vor fi puncte laticiale (cu ambele coordonate întregi) adiacente. Atunci punctul A va avea mereu suma coordonatelor pară, iar punctul B va avea mereu suma coordonatelor ipară, deci cele două puncte nu pot fi interschimbate.
b) Fie $\theta = \frac{\pi}{3}$ (adică $60°$). Considerăm un triunghi echilateral XYZ în care A coincide cu X şi B coincide cu Y. La primul pas îl mutăm pe B în Z. La pasul al doilea îl mutăm pe A în Y, iar în al treilea pas îl mutăm pe B în X. Astfel am intervertit poziţiile iniţiale ale punctelor A şi B.


A
B
B
A
B
A
B
A