# BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid"
# Cipru, 24 martie 2018 (barajul 3)

**Problema 1.** Dacă $a, b, c$ sunt numere reale pozitive, demonstraţi că

$$\frac{(a^2c+b)(b^2a+c)(c^2b+a)}{a^2b^2c^2} \geq 8.$$

Când are loc egalitatea?

**Problema 2.** Fie $ABC$ un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}$ şi $D$ punctul diametral opus lui $A$ în acest cerc. Fie $D_1$ simetricul lui $D$ faţă de dreapta $AB$ şi $D_2$ simetricul lui $D$ faţă de dreapta $AC$. Fie $I$ punctul de intersecţie a dreptelor $AC$ şi $BD$, $K$ mijlocul lui $[D_1D_2]$ şi $N$ mijlocul lui $[BC]$. Demonstraţi că:
a) $\sphericalangle D_1AI \equiv \sphericalangle D_1D_2I$ şi că
b) paralela prin $N$ la $AD$ trece prin mijlocul lui $[AK]$.

**Problema 3.** Numerele naturale $a$ şi $b$ sunt definite astfel:

$$a = 2^{2018} + 3^{2018} + 4^{2018} + 5^{2018},\ b = \frac{3^{2019}-3}{2}.$$

Determinaţi ultima cifră a numărului $a^2 + b^2 + ab$.

**Problema 4.** Avem două grămezi conţinând 2000, respectiv 2018 monede. Ana şi Bogdan mută alternativ astfel: jucătorul aflat la mutare ia $t$ monede dintr-o grămadă are conţine cel puţin două monede, unde $t \in \{2, 3, 4\}$, şi adaugă o monedă la cealaltă grămadă. Jucătorii pot alege un alt $t$ şi o altă grămadă la fiecare mutare a lor, iar jucătorul care nu poate muta pierde. Dacă Ana mută prima, determinaţi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare.

*Timp de lucru:* 4 ore şi 30 de minute

**Soluţii oficiale:**

**Problema 1.** Dacă $a, b, c$ sunt numere reale pozitive, demonstraţi că

$$\frac{(a^2c+b)(b^2a+c)(c^2b+a)}{a^2b^2c^2} \geq 8.$$

Când are loc egalitatea?

**Soluţie:**

$$\frac{(a^2c+b)(b^2a+c)(c^2b+a)}{a^2b^2c^2} = \frac{a^2c+b}{ac} \cdot \frac{b^2a+c}{ba} \cdot \frac{c^2b+a}{cb} =$$

$$\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ba}\right)\left(c+\frac{a}{cb}\right) \geq 2\sqrt{a\cdot\frac{b}{ac}} \cdot 2\sqrt{b\cdot\frac{c}{ba}} \cdot 2\sqrt{c\cdot\frac{a}{cb}} = 8$$

Egalitate avem dacă $\begin{cases} a = \dfrac{b}{ac} \\ b = \dfrac{c}{ba} \\ c = \dfrac{a}{cb} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2c = b \quad (1) \\ b^2a = c \quad (2) \\ c^2b = a \quad (3). \end{cases}$

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem că $abc = 1 \quad (4)$.

Din (1) şi (2) rezultă $a^3b = 1$, iar din (4) că $b = \dfrac{1}{ac}$. Rezultă că $a^2 = c \quad (5)$.

Analog, $b^2 = a \quad (6)$ şi $c^2 = b \quad (7)$. Din (5) şi (7) rezultă că $a^4 = b$ şi, înlocuind în (6), obţinem $a^8 = a$, de unde $a = 1$.

Analog, $b = 1$ şi $c = 1$, prin urmare egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

**Problema 2.** Fie $ABC$ un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}$ şi $D$ punctul diametral opus lui $A$ în acest cerc. Fie $D_1$ simetricul lui $D$ faţă de dreapta $AB$ şi $D_2$ simetricul lui $D$ faţă de dreapta $AC$. Fie $I$ punctul de intersecţie a dreptelor $AC$ şi $BD$, $K$ mijlocul lui $[D_1D_2]$ şi $N$ mijlocul lui $[BC]$. Demonstraţi că:

a) $\sphericalangle D_1AI \equiv \sphericalangle D_1D_2I$ şi că

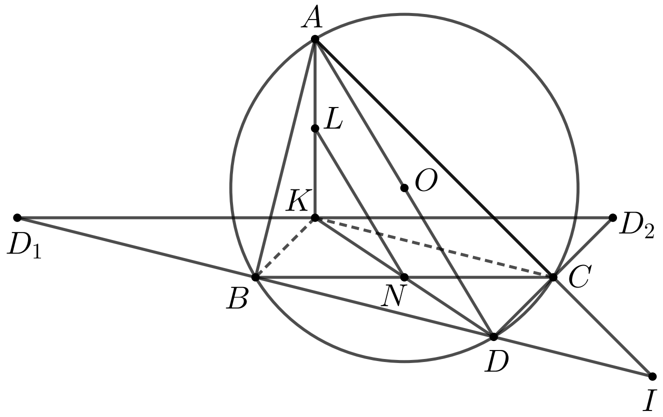
b) paralela prin $N$ la $AD$ trece prin mijlocul lui $[AK]$.

**Soluţie:**

**a)** Mai întâi observăm că $DD_1$ şi $DD_2$ trec prin $B$, respectiv $C$ şi că, datorită simetriei, avem $AD_1 = AD = AD_2$ şi $ID = ID_2$. Avem $m(\sphericalangle D_1AI) = m(\sphericalangle D_1AB) + m(\sphericalangle BAI) = m(\sphericalangle D_1AB) + m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle D_2DI)$ ($ABDC$ este inscriptibil). Mai departe, $m(\sphericalangle D_1AI) = m(\sphericalangle BCD) + m(\sphericalangle DD_2I) = m(\sphericalangle D_1D_2D) + m(\sphericalangle DD_2I)$ (căci $BC \parallel D_1D_2$), deci $\sphericalangle D_1AI \equiv \sphericalangle D_1D_2I$.

**b)** Fie $L$ intersecţia paralelei prin $N$ la $AD$ cu dreapta $AK$. Avem $BK \parallel CD$ şi $BK = CD$ deoarece în triunghiul $DD_1D_2$ punctele $B$ şi $K$ sunt mijloacele laturilor

$[D_1D]$, respectiv $[D_1D_2]$. Deci $BKCD$ este paralelogram, iar $N$ este mijlocul diagonalei $[KD]$. În fine, în triunghiul $AKD$, $N$ este mijlocul laturii $[KD]$ şi $NL \parallel DA$ implică faptul că $L$ este mijlocul lui $[AK]$.




**Problema 3.** Numerele naturale $a$ şi $b$ sunt definite astfel:

$$a = 2^{2018} + 3^{2018} + 4^{2018} + 5^{2018},\ b = \frac{3^{2019} - 3}{2}.$$

Determinaţi ultima cifră a numărului $a^2 + b^2 + ab$.

**Soluţie:** Avem
- $2^{2018} = 2^{2016} \cdot 2^2 = 2^{4\cdot 504} \cdot 4 = 16^{504} \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \pmod{10} \equiv 24 \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}$
- $3^{2018} = 3^{2016} \cdot 3^2 = 3^{4\cdot 504} \cdot 9 = 81^{504} \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10}$
- $4^{2018} = 4^{2016} \cdot 4^2 = 256^{504} \cdot 16 \equiv 16 \cdot 6 \pmod{10} \equiv 96 \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10}$
- $5^{2018} \equiv 5 \pmod{10}$

Prin urmare, $a \equiv 4 + 9 + 6 + 5 \pmod{10} \equiv 24 \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}$, de unde

$$a^2 \equiv 16 \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10}. \qquad (1)$$

De asemenea, $2b = 3^{2019} - 3 = 3^{3\cdot 673} \cdot 3 - 3 = 27^{673} - 3 \equiv 7 - 3 \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}$.

Prin urmare, $2b = 10k + 4$, cu $k \in \mathbb{N}$, deci $b = 5k + 2$. Dar $b$ este par, deci $k$ este par, prin urmare $b \equiv 2 \pmod{10}$, deci

$$b^2 \equiv 4 \pmod{10}. \qquad (2)$$

În fine,

$$ab \equiv 4 \cdot 2 \pmod{10} \equiv 8 \pmod{10}. \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $a^2 + b^2 + ab \equiv 6 + 4 + 8 \pmod{10} \equiv 8 \pmod{10}$, deci ultima cifră a numărului $a^2 + b^2 + ab$ este 8.

**Problema 4.** Avem două grămezi conţinând 2000, respectiv 2018 monede. Ana şi Bogdan mută alternativ astfel: jucătorul aflat la mutare ia $t$ monede dintr-o grămadă are conţine cel puţin două monede, unde $t \in \{2, 3, 4\}$, şi adaugă o monedă la cealaltă grămadă. Jucătorii pot alege un alt $t$ şi o altă grămadă la fiecare mutare a lor, iar jucătorul care nu poate muta pierde. Dacă Ana mută prima, determinaţi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare.

**Soluţie:**
Notăm cu $A_n$ numărul de monede rămase în prima grămadă după cea de-a $n$-a mutare şi cu $B_n$ numărul de monede rămase în cea de-a doua grămadă după mutarea a $n$-a. Vom spune că o distribuţie de monede (o poziţie) este *pierzătoare* dacă $A_n - B_n \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$ şi că este *câştigătoare* dacă $A_n - B_n \equiv 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 8$.

**Lema 1:** Dacă urmăm la mutare într-o poziţie câştigătoare, atunci avem la dispoziţie o mutare care să lase adversarul într-o poziţie pierzătoare.
**Demonstraţie:** Deoarece mulţimea $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ este simetrică modulo 8, putem presupune că $A_n \geq B_n$. Atunci $A_n = B_n + 8k + \ell$ pentru un $k \in \mathbb{N}$ şi $\ell \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $\ell = 2, 3, 4$, atunci luăm 2 monede din prima grămadă şi adăugăm una la cea de-a doua grămadă. Dacă $\ell = 5, 6$, atunci luăm 4 monede din prima grămadă şi adăugăm una la cea de-a doua grămadă. În orice caz se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$.

**Lema 2:** Dacă urmăm la mutare într-o poziţie pierzătoare, atunci fie nu mai avem nicio mutare disponibilă, fie, dacă avem, atunci orice mutare am face, ea îl lasă pe adversar într-o poziţie câştigătoare.
**Demonstraţie:** Fără a restrânge generalitatea, vom presupune ca se iau monede din prima grămadă (dacă se poate). Să examinăm valorile lui $A_{n+1} - B_{n+1}$ în funcţie de $A_n - B_n$ şi posibilele mutări:
- Dacă $A_n - B_n \equiv 0 \pmod 8$, luând 2, 3, sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 5, 4, 3 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.
- Dacă $A_n - B_n \equiv 1 \pmod 8$, luând 2, 3, sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 6, 5, 4 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.
- Dacă $A_n - B_n \equiv 7 \pmod 8$, luând 2, 3, sau 4 monede din prima grămadă şi adăugând una în grămada a doua, se ajunge la $A_{n+1} - B_{n+1} \equiv 4, 3, 2 \pmod 8$ (respectiv) care sunt, toate, poziţii pierzătoare.

În concluzie, orice am muta, îi vom lăsa adversarului o poziţie câştigătoare.

Deoarece iniţial, diferenţa de monede este $A_0 - B_0 = -18 \equiv 6 \pmod 8$, din lemele 1 şi 2 rezultă că Ana nu pierde: ea poate mereu muta astfel încât să îi lase lui Bogdan o poziţie pierzătoare. Pe de altă parte, jocul se încheie după cel mult 4018 mutări, prin urmare Bogdan va pierde, adică Ana va câştiga.