BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 24 februarie 2018 (barajul 2)

Problema 1. Se consideră mulţimea $A_1 = \{n,\, n+1,\, n+2\}$, unde n este un număr natural impar mai mic ca 2016. Construim un şir $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots$ de mulţimi, fiecare având câte trei elemente, pornind de la mulţimea A_1 şi făcând la fiecare pas una din următoarele operaţii:
operaţia 1: Pentru a obţine mulţimea A_{i+1}, alegem un $k \in \mathbb{N}$ şi îl adunăm la două din cele trei elemente ale lui A_i, lăsându-l pe cel de-al treilea nemodificat. (De exemplu, dacă am ales numărul natural k, atunci A_2 ar putea fi $\{n+k,\, n+1+k,\, n+2\}$.)
operaţia 2: Pentru a obţine mulţimea A_{i+1}, alegem un $k \in \mathbb{N}$, îl adunăm la unul din cele trei elemente ale lui A_i, îl scădem dintr-un alt element şi lăsăm cel de-al treilea element nemodificat. (De exemplu, dacă am ales numărul natural m, atunci A_2 ar putea fi $\{n+m,\, n+1,\, n+2-m\}$.)
Stabiliţi dacă este posibil ca după un anumit număr de operaţii să ajungem la mulţimea $A_j = \{2016,\, 2017,\, 2018\}$.

Problema 2. Se dau cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Determinaţi suma tuturor numerelor **pare** de trei cifre care se obţin folosind cifrele date, dacă repetarea unei cifre nu este permisă.

Problema 3. Fie b_i, cu $i = 1, 2, \ldots, 2018$, numere naturale nenule astfel încât

$$\frac{1}{b_1^3} + \frac{1}{b_2^3} + \ldots + \frac{1}{b_{2018}^3} = \frac{1}{2}.$$

Demonstraţi că:
a) pentru orice număr natural $n > 1$ are loc: $\dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$;
b) cel puţin trei dintre numerele b_i, cu $i = 1, 2, \ldots, 2018$, sunt egale.

Problema 4. Fie ABC un triunghi echilateral şi c cercul cu centrul în A şi rază AB. Considerăm un punct T pe arcul mare BC al cercului c şi trasăm coarda $[BT]$. Paralela prin C la dreapta BT intersectează din nou cercul c în punctul K. Fie D, E şi F mijloacele segmentelor $[BT]$, $[AC]$, respectiv $[AK]$. Fie P un punct exterior cercului şi aflat pe semidreapta $(DA$ şi fie S un punct interior cercului astfel încât $DEPS$ este un patrulater convex cu $DE = SE$ şi $m(\sphericalangle DSP) = 150°$.
Demonstraţi că:
a) triunghiul DEF este echilateral şi
b) $\sphericalangle EPD \equiv \sphericalangle DPS$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Se consideră mulţimea $A_1 = \{n,\, n+1,\, n+2\}$, unde n este un număr natural impar mai mic ca 2016. Construim un şir $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots$ de mulţimi, fiecare având câte trei elemente, pornind de la mulţimea A_1 şi făcând la fiecare pas una din următoarele operaţii:
operaţia 1: Pentru a obţine mulţimea A_{i+1}, alegem un $k \in \mathbb{N}$ şi îl adunăm la două din cele trei elemente ale lui A_i, lăsându-l pe cel de-al treilea nemodificat. (De exemplu, dacă am ales numărul natural k, atunci A_2 ar putea fi $\{n+k,\, n+1+k,\, n+2\}$.)
operaţia 2: Pentru a obţine mulţimea A_{i+1}, alegem un $k \in \mathbb{N}$, îl adunăm la unul din cele trei elemente ale lui A_i, îl scădem dintr-un alt element şi lăsăm cel de-al treilea element nemodificat. (De exemplu, dacă am ales numărul natural m, atunci A_2 ar putea fi $\{n+m,\, n+1,\, n+2-m\}$.)
Stabiliţi dacă este posibil ca după un anumit număr de operaţii să ajungem la mulţimea $A_j = \{2016,\, 2017,\, 2018\}$.

Soluţie: Suma elementelor mulţimii $A_1 = \{n,\, n+1,\, n+2\}$ este un număr par deoarece n şi $n+2$ sunt numere impare, iar $n+1$ este număr par. După fiecare pas, suma rămâne mereu pară, fie că se efectuează operaţia 1 (suma creşte cu un număr par, $2k$), fie că se efectuează cea de-a doua operaţie (suma nu se modifică). Pe de altă parte, suma $2016+2017+2018 = 6051$ este impară. Aşadar, prin aceste operaţii nu se poate obţine mulţimea $A_j = \{2016,\, 2017,\, 2018\}$.

Remarcă: Dacă se porneşte de la un $A_1 = \{n,\, n+1,\, n+2\}$ cu $n < 2016$ **par**, atunci mulţimea A_j poate fi atinsă de exemplu astfel: cu trei operaţii 1 aplicate cu $k=1$ se ajunge succesiv la $A_2 = \{n,\, n+2,\, n+3\}$, $A_3 = \{n+1,\, n+2,\, n+4\}$, $A_4 = \{n+2,\, n+3,\, n+4\}$. Din aproape în aproape se ajunge la $A_j = \{2016, 2017, 2018\}$.

Problema 2. Se dau cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Determinaţi suma tuturor numerelor **pare** de trei cifre care se obţin folosind cifrele date, dacă repetarea unei cifre nu este permisă.

Soluţie:
• Sunt $3 \cdot 4$ numere care au prima cifră 1 (ultima cifră poate fi aleasă în 3 moduri, apoi penultima în 4 moduri). Similar, sunt 12 numere care au prima cifră 3 şi 12 care au prima cifră 5. De asemenea, sunt $2 \cdot 4$ numere care au prima cifră 2 şi tot 8 care au prima cifră 4. Atunci suma cifrei sutelor tuturor acestor numere este

$$12(1+3+5) + 8(2+4) = \mathbf{156}.$$

• Sunt $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$ numere care au cifra din mijloc 1 (pentru prima cifră avem două opţiuni: dacă prima cifră este pară, ultima cifră poate fi aleasă în două moduri, iar dacă prima cifră este impară, ultima cifră poate fi aleasă în 3 moduri).

Similar, sunt 10 numere care au cifra mijlocie 3 şi 10 care au cifra mijlocie 5.
De asemenea, sunt $1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$ numere care au cifra mijlocie 2 şi încă 7 care au cifra mijlocie 4.
Astfel, suma cifrei zecilor tuturor acestor numere este

$$10(1 + 3 + 5) + 7(2 + 4) = \mathbf{132}.$$

Avem $4 \cdot 4$ numere care se termină în 2 şi încă 16 care se termină în 4. De asemenea există $5 \cdot 4$ numere care se termină în 0.
Astfel, suma ultimei cifre a tuturor acestor numere este

$$16(2 + 4) + 20 \cdot 0 = \mathbf{96}.$$

În fine, suma tuturor numerelor de trei cifre este

$$\mathbf{96} \cdot 1 + \mathbf{132} \cdot 10 + \mathbf{156} \cdot 100 = \mathbf{17016}.$$

Problema 3. Fie b_i, cu $i = 1, 2, \ldots, 2018$, numere naturale nenule astfel încât

$$\frac{1}{b_1^3} + \frac{1}{b_2^3} + \ldots + \frac{1}{b_{2018}^3} = \frac{1}{2}.$$

Demonstraţi că:
a) pentru orice număr natural $n > 1$ are loc: $\dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$;
b) cel puţin trei dintre numerele b_i, cu $i = 1, 2, \ldots, 2018$, sunt egale.

Soluţie:
a) Avem:
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n(n+1) - 2(n-1)(n+1) + n(n-1)}{n(n-1)(n+1)} = \dfrac{1}{n^3 - n} > \dfrac{1}{n^3}$.
b) Evident, $b_i \neq 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2018$.
Presupunem că în suma dată nu există mai mult de doua termeni egali. Atunci avem:
$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{b_1^3} + \dfrac{1}{b_2^3} + \ldots + \dfrac{1}{b_{2018}^3} \leq \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{1010^3} + \dfrac{1}{1010^3} = 2\left(\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{1010^3}\right)$.
Aşadar,

$$\frac{1}{2} \leq 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{1010^3}\right). \qquad (*)$$

Aplicând inegalitatea de la a), avem succesiv:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
\frac{1}{3^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\\
\frac{1}{4^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-1}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
\frac{1}{5^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-1}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)\\
&\vdots\\
\frac{1}{1008^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1008-1}-\frac{2}{1008}+\frac{1}{1008+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1007}-\frac{2}{1008}+\frac{1}{1009}\right)\\
\frac{1}{1009^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1009-1}-\frac{2}{1009}+\frac{1}{1009+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1008}-\frac{2}{1009}+\frac{1}{1010}\right)\\
\frac{1}{1010^3} &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1010-1}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1010+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1009}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1011}\right).
\end{aligned}
$$

Adunăm relaţiile de mai sus şi obţinem:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{1010^3}<\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1010}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1011}\right)\overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\leq 2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{1010^3}\right)<\frac{1}{2}-\frac{1}{1010\cdot 1011}.$$

Am obţinut că

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{1010\cdot 1011},$$

contradicţie.

Problema 4. Fie ABC un triunghi echilateral şi c cercul cu centrul în A şi rază AB. Considerăm un punct T pe arcul mare BC al cercului c şi trasăm coarda $[BT]$. Paralela prin C la dreapta BT intersectează din nou cercul c în punctul K. Fie D, E şi F mijloacele segmentelor $[BT]$, $[AC]$, respectiv $[AK]$. Fie P un punct exterior cercului şi aflat pe semidreapta $(DA$ şi fie S un punct interior cercului astfel încât $DEPS$ este un patrulater convex cu $DE = SE$ şi $m(\sphericalangle DSP) = 150°$. Demonstraţi că:

a) triunghiul DEF este echilateral şi

b) $\sphericalangle EPD \equiv \sphericalangle DPS$.

Soluţie: a) BE este înălţime şi bisectoare în triunghiul echilateral ABC. Deoarece D este mijlocul coardei $[BF]$ în cercul c, avem că $AD \perp BF$, deci patrulaterul $ADBE$ este inscriptibil, de unde obţinem că $m(\sphericalangle EDA) = m(\sphericalangle EBA) = 30°$.

Cum $EF \parallel CK \parallel BT$, avem $DA \perp EF$. Triunghiul EAF fiind isoscel, DA intersectează $[EF]$ în mijlocul acestuia, M. Rezultă că triunghiul DEF este isoscel, cu $DE = DF$. Dar, cum $m(\sphericalangle DEM) = 60°$, rezultă că triunghiul DEF este echilateral.

b) Cercul de centru E şi rază DE trece prin F şi S deoarece $ED = EF = ES$. Rezultă că

$$m(\sphericalangle DSF) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle DEF) = 30°,$$

deci $m(\sphericalangle FSP) = 30° + 150° = 180°$, ceea ce arată că punctele F, S, P sunt coliniare. Din triunghiurile congruente FDP şi EDP rezultă imediat că $\sphericalangle EPD \equiv \sphericalangle FPD = \sphericalangle DPS$.