Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018

Clasa a VIII-a

Problema 1. Demonstraţi că dacă pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $1 + 2^n + 4^n$ este prim, atunci $n = 3^k$, unde $k \in \mathbb{N}$.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţia 1: Fie $n = 3^k \cdot r$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $(r; 3) = 1$. Demonstrăm că numărul $p = 1 + 2^n + 4^n$ se divide la numărul $q = 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}$. Evident că

$$q| \left(1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}\right) \left(1 - 2^{3^k}\right) = 1 - 2^{3^{k+1}},$$

deci $2^{3^{k+1}} \equiv 1 \pmod{q}$.
Dacă $r = 3s + 1$, atunci $n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$, de unde $2^n \equiv 2^{3^k} \pmod{q}$ şi $4^n \equiv 4^{3^k} \pmod{q}$; deci $p \equiv 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$, adică $q|p$.
Dacă $r = 3s + 2$, atunci $n \equiv 2 \cdot 3^k \pmod{3^{k+1}}$, de unde $2n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$; deci $p \equiv 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$, adică $q|p$.
Aşadar, în ambele situaţii am obţinut că $q|p$ şi, cum p este prim, iar $q > 1$, deducem că $p = q$ şi în concluzie $n = 3^k$.

Soluţia 2: Vom arăta mai întâi că $x^2 + x + 1$ divide $x^{2k} + x^k + 1$ dacă k nu este multiplu de 3.
Dacă $k = 3j + 1$, $j \in \mathbb{N}$, arătăm că $x^{2k} - x^2$ e divizibil cu $x^3 - 1$, deci cu $x^2 + x + 1$, iar $x^k - x$ este divizibil cu $x^3 - 1$, deci cu $x^2 + x + 1$. Rezultă că şi diferenţa $x^{2k} - x^2 - (x^k - x) = (x^{2k} + x^k + 1) - (x^2 + x + 1)$ este divizibilă cu $x^2 + x + 1$ şi, în fine, $x^{2k} + x^k + 1$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$. Cum $x^{2k} - x^2 = (x^k - x)(x^k + x)$, este suficient să demonstrăm că $x^k - x$ este divizibil cu $x^3 - 1$. Ori $x^{3j+1} - x = x\big((x^3)^j - 1^j\big) = x(x^3 - 1)(x^{3j-3} + x^{3j-6} + \ldots + x^3 + 1)$, este divizibil cu $x^3 - 1$.
Analog se arată că dacă $k = 3j + 2$, cu $j \in \mathbb{N}$, atunci $x^{2k} - x$ şi $x^k - x^2$ sunt divizibile cu $x^3 - 1$.

Aşadar, dacă n nu e putere a lui 3, atunci $n = 3^k \cdot r$, cu $(r, 3) = 1$, $r > 1$, iar $4^n + 2^n + 1$ este divizibil cu $4^{3^k} + 2^{3^k} + 1$ şi mai mare ca acesta, deci nu este prim.

Problema 2. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = \dfrac{x^3 + 16}{y^2 + 4} + \dfrac{y^3 + 16}{x^2 + 4}$ atunci când $x, y \geq 0$.

Soluţie: Vom arăta că minimul căutat este 6.

Din inegalitatea mediilor, $E(x,y) \geq 2\sqrt{\frac{x^3+16}{y^2+4} \cdot \frac{y^3+16}{x^2+4}} = 2\sqrt{\frac{x^3+16}{x^2+4} \cdot \frac{y^3+16}{y^2+4}}$.

Arătăm că $\frac{x^3+16}{x^2+4} \geq 3$, cu egalitate dacă $x = 2$. Această inegalitate se scrie $x^3+16 \geq 3(x^2+4)$, adică $x^3-3x^2+4 \geq 0$. Avem $x^3-2x^2-x^2+4 = (x-2)x^2 - (x-2)(x+2) = (x-2)(x^2-x-2) = (x-2)(x^2-2x+x-2) = (x-2)^2(x+1) \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 2$. Aşadar $E(x,y) \geq 2\sqrt{3 \cdot 3} = 6$, cu egalitate dacă (şi numai dacă) $x = y = 2$.

Observaţie: O altă cale de a demonstra că $E(x,y) \geq 6$, $\forall\, x, y \geq 0$ este următoarea: Din inegalitatea rearanjamentelor avem $\frac{x^3+16}{y^2+4} + \frac{y^3+16}{x^2+4} \geq \frac{x^3+16}{x^2+4} + \frac{y^3+16}{y^2+4} \geq 3+3 = 6$.

Problema 3. Ana şi Bogdan joacă un joc pe o tablă $1 \times n$ împărţită în n pătrăţele numerotate de la stânga la dreapta cu $1, 2, \ldots, n$. Iniţial, în pătrăţelul 1 este plasat un pion. Ana şi Bogdan mută alternativ. Ana mută prima. La fiecare mutare, jucătorul aflat la rând poate muta pionul fie cu 53 de pătrăţele la dreapta, fie cu două pătrăţele la stânga. (Nu sunt permise mutări prin care pionul să părăsească tabla de joc.) Câştigă jucătorul care plasează pionul pe pătrăţelul cel mai din dreapta, cel cu numărul n. Care din cei doi jucători are strategie de câştig dacă $n = 2017$? Dar dacă $n = 2018$?

Soluţie:

Dacă $n = 2017$, Bogdan are strategie câştigătoare. Dacă Ana mută 53 la dreapta, Bogdan mută 2 la stânga (poate muta astfel!), iar dacă Ana mută 2 la stânga, Bogdan mută 53 la dreapta (atâta timp cât poate). Astfel, după fiecare pereche de mutări, pionul avansează câte 51 de pătrăţele la dreapta ajungând la $1 + 39 \cdot 51 = 1990$ (fără să treacă prin 1964 de unde s-ar fi putut câştiga direct). Acum nu mai este (deocamdată) loc pentru mutări de 53 la dreapta, deci obligatoriu ambii jucători mută pionul cu 2 la stânga până când, după mutarea lui Bogdan, pionul ajunge la 1966. Ana e obligată să mute la 1964, iar Bogdan câştigă mutând la 2017.

Dacă $n = 2018$, Ana este cea care are strategie câţigătoare. Ea mută (obligată) la 54, apoi mută invers decât a mutat Bogdan la precedenta sa mutare. Astfel, în fiecare pereche de mutări ,,Bogdan urmat de Ana", pionul avansează cu câte 51 până când ajunge, după 38 de perechi de mutări, la $54 + 38 \cdot 51 = 1992$. De aici se mută obligat cu câte 2 înapoi până la 1964 (mutarea Anei). Acum orice mută Bogdan, Ana face invers, mutând pionul la 2015. De aici iarăşi se coboară obligat până la 1965, unde se ajunge prin mutarea lui Bogdan. (Acest lucru se poate vedea scriind efectiv paşii sau analizând modulo 4.) Atunci Ana poate muta la 2018 şi câştiga.