

CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ȘI VIITORIOOLIMPICI.RO
ETAPA FINALĂ
CÂMPULUNG MUSCEL, 15 AUGUST 2018

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeași sumă.

(a) Arătați că pe patru dintre bile este scris același număr.

(b) Arătați că pe bile sunt scrise cel mult $n - 1$ numere distincte.

VIITORIOOLIMPICI.RO

Soluție:

(a) Dacă pe bile sunt scrise numerele $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{2n}$, formăm perechile $\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \dots, \{a_{2n-1}, a_{2n}\}$. Evident, avem $a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 \leq \dots \leq a_{2n-1} + a_{2n}$. Cum printre sume există două egale, vor exista și două consecutive egale, $a_{2j-1} + a_{2j} = a_{2j+1} + a_{2j+2}$. Dar cum $a_{2j-1} \leq a_{2j} \leq a_{2j+1} \leq a_{2j+2}$, rezultă că trebuie să avem egalitate peste tot, adică $a_{2j-1} = a_{2j} = a_{2j+1} = a_{2j+2}$.

(b) Presupunem că ar exista n valori distincte $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ scrise pe bile. Aranjăm și celelalte numere (egale sau nu cu celelalte n) în ordine crescătoare: $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. Formând grupele $\{b_1, c_1\}, \{b_2, c_2\}, \dots, \{b_n, c_n\}$, obținem sumele distincte $b_1 + c_1 < b_2 + c_2 < \dots < b_n + c_n$, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar putem avea cel mult $n - 1$ valori distincte.

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Fie E simetricul lui A față de B . Pe diagonala BD se consideră punctul F astfel încât $m(\angle AEF) = 15^\circ$. Bisectoarea $\angle FEC$ intersectează BC în M și CD în N . Arătați că:

a) punctele A, F, M sunt coliniare;

b) triunghiul CNF este echilateral.

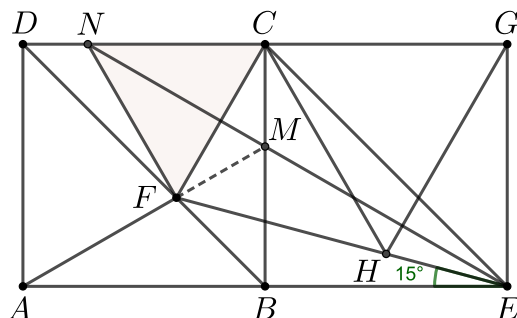
Adrian Bud

Soluția 1: (*Mircea Fianu*)

a) Construim pătratul $CBEG$, iar în interiorul acestuia triunghiul echilateral CGH . Triunghiul GHE este isoscel cu unghiul la vârf de 30° , deci $m(\angle GEH) = 75^\circ$. Rezultă că H se află pe dreapta EF . De asemenea, $m(\angle CHE) = 135^\circ = m(\angle EBF)$, $m(\angle HCE) = 15^\circ = m(\angle BEF)$ și $CH = CG = BE$, deci triunghiurile EHC și FBE sunt congruente (ULU). Deducem că triunghiul CEF este isoscel, deci $m(\angle FCE) = 75^\circ$, iar $m(\angle FCM) = 30^\circ$. Pe de altă parte, $\triangle BFA \equiv \triangle BFC$

(LUL), deci $m(\angle FAB) = 30^\circ$. M se află pe mediatoarea segmentului $[AE]$, deci triunghiul MAE este isoscel. Rezultă că $m(\angle MAE) = m(\angle MEA) = 30^\circ = m(\angle FAE)$, deci $F \in AM$.

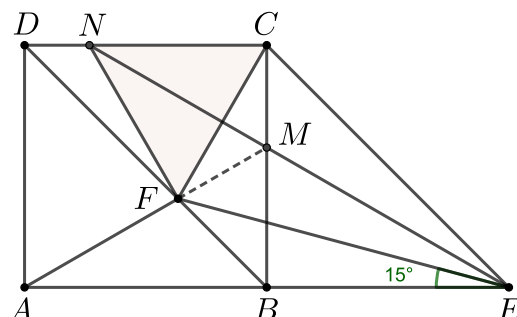
b) Punctul N se află pe mediatoarea segmentului $[CF]$, deci triunghiul NCF este isoscel cu unghiul $\angle NCF$ de 60° , prin urmare este echilateral.



Soluția 2: (Mircea Fianu)

a) (EF este bisectoarea unghiului $\angle MEB$, iar (BF este bisectoare exterioară în triunghiul EBM , deci F este centrul cercului exînscriș triunghiului MBE tangent laturii $[BM]$. Atunci și (MF este bisectoare exterioară și, cum $m(\angle BME) = 60^\circ$, rezultă că $m(\angle NMF) = m(\angle FMB) = 60^\circ$. Pe de altă parte, din $\Delta MAB \equiv \Delta MEB$ rezultă $m(\angle AMB) = m(\angle EMB) = 60^\circ$, deci $\angle AMB \equiv \angle EMB$. Deci $F \in AM$.

b) Avem: $m(\angle FCM) = m(\angle FAB) = 30^\circ$, deci $m(\angle FCE) = 75^\circ$. Rezultă că $EM \perp CF$, deci dreapta MN este mediatoarea segmentului $[FC]$. Rezultă că triunghiul NCF este isoscel cu unghiul $\angle NCF$ de 60° , prin urmare este echilateral.



Problema 3. Determinați cea mai mică constantă $c > 0$ pentru care avem proprietatea:

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ este adevărată inegalitatea

$$|\sqrt{m^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}| \leq c|m - n|.$$

Soluție: Arătăm că $c = 1$ satisface proprietatea din enunț.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $m \geq n$. Atunci $\sqrt{m^2 + 1} \geq \sqrt{n^2 + 1}$, deci inegalitatea din enunț revine la $\sqrt{m^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \leq m - n$. Ea este evident adevărată pentru $m = n$. Pentru $m > n$ ea se scrie $\frac{m^2 - n^2}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \leq m - n$, adică $m + n \leq \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}$ ceea ce este evident adevărat.

Presupunând că afirmația este adevărată pentru un $c < 1$, scriind condiția pentru $m = 0$ și n arbitrar, ar trebui să avem $\sqrt{n^2 + 1} \leq cn + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $n^2 + 1 \leq c^2 n^2 + 2cn + 1$. Din această ultimă relație rezultă $n(1 - c^2) \leq 2c$ și, împărțind cu $1 - c^2 > 0$, obținem că $n \leq \frac{2c}{1 - c^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce contrazice faptul că există numere naturale oricât de mari.