Problema săptămânii 107
Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a, b, c > 1$, pentru care $ab \equiv 1 \pmod{c}$, $bc \equiv 1 \pmod{a}$ şi $ca \equiv 1 \pmod{b}$.
Soluţie: (*Gheorghe Eckstein*)
Numerele trebuie să fie distincte. Dacă, de exemplu, $a = b$, atunci $1 \equiv ca \equiv 0 \pmod{b}$, ceea ce nu se poate deoarece $b > 1$. Putem presupune $a < b < c$. Atunci $ab = jc + 1$, cu $j \in \mathbb{N}^*$, $j < a$, deci $a^2b = acj + a$. Cum $ac \equiv 1 \pmod{b}$, rezultă $j + a \equiv 0 \pmod{b}$. Dar $0 < j + a < 2b$, deci $j + a = b$. Aşadar $j = b - a$ şi $ab = (b - a)c + 1$, sau $ab + ac = bc + 1 = \ell a + 2$, cu $\ell \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $a(b+c-\ell) = 2$, deci $a = 2$ şi $b+c-\ell = 1$. Din $j < a$ rezultă $j = 1$, apoi $c = 2b-1$. $2c \equiv 1 \pmod{b}$ implică atunci $b = 3$, $c = 5$ care verifică într-adevăr relaţiile date.

Problem of the week no. 107
Determine $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a, b, c > 1$, such that $ab \equiv 1 \pmod{c}$, $bc \equiv 1 \pmod{a}$, and $ca \equiv 1 \pmod{b}$.

Solution: (*Gheorghe Eckstein*)
No two numbers can be equal, therefore we may assume $a < b < c$. Then $ab = jc+1$, with $j \in \mathbb{N}$, $j < a$, hence $a^2b = acj + a$. From $ac \equiv 1 \pmod{b}$ it follows that $j + a \equiv 0 \pmod{b}$. But $0 < j + a < 2b$, hence $j + a = b$. Thus $j = b - a$ and $ab = (b - a)c + 1$, i.e. $ab + ac = bc + 1 = \ell a + 2$, with $\ell \in \mathbb{N}$. It follows that $a(b + c - \ell) = 2$, hence $a = 2$ and $b + c - \ell = 1$. From $j < a$ we get $j = 1$, then $c = 2b - 1$. $2c \equiv 1 \pmod{b}$ implies $b = 3$, $c = 5$ which do indeed satisfy the given conditions.