Problema săptămânii 106
Determinaţi toate numerele naturale $n > 2$ cu proprietatea că se poate alege unul dintre numerele $1, 2, \ldots, n+1$ astfel încât, după îndepărtarea acestuia, cele n rămase să poată fi aranjate într-o anumită ordine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care nicicare două dintre numerele $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$ să nu fie egale.

Mathematical Excalibur

Soluţie: (*Mathematical Excalibur*)
Cum numerele $|a_1 - a_2|$, $|a_2 - a_3|$, ... , $|a_{n-1} - a_n|$, $|a_n - a_1|$ sunt pozitive, distincte şi cel mult egale cu n, ele trebuie să fie tocmai numerele $1, 2, \ldots, n$ într-o anumită ordine. Atunci $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$. Dar $a \equiv |a| \pmod 2$ şi $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_1) = 0$, deci $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ este par. Pentru ca $n(n+1)/2$ să fie par, este necesar ca $n \equiv 0 \pmod 4$ sau $n \equiv -1 \pmod 4$.

În cazul $n = 4k$, îndepărtăm $k + 1$ şi aranjăm numerele rămase astfel:
$a_1 = 4k + 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4k$, $a_4 = 2$, ..., $a_{2k-1} = 3k + 2$, $a_{2k} = k$, $a_{2k+1} = 3k + 1$, $a_{2k+2} = k + 2$, $a_{2k+3} = 3k$, $a_{2k+4} = k + 3$, ..., $a_{4k-1} = 2k + 2$ şi $a_{4k} = 2k + 1$.

În cazul $n = 4k - 1$, îndepărtăm $3k$ şi aranjăm numerele rămase astfel:
$a_1 = 4k$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4k - 1$, $a_4 = 2$, ..., $a_{2k-1} = 3k + 1$, $a_{2k} = k$, $a_{2k+1} = 3k - 1$, $a_{2k+2} = k + 1$, $a_{2k+3} = 3k - 2$, ..., $a_{4k-2} = 2k - 1$ şi $a_{4k-1} = 2k$.

Problem of the week no. 106
Determine all integers $n > 2$ with the property that there exists one of the numbers $1, 2, \ldots, n+1$ such that after its removal, the n numbers left can be arranged as $a_1, a_2, \ldots, a_n$ with no two of $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$ being equal.

Mathematical Excalibur

Solution: See the solution of problem 498 in vol. 21, no. 2.